

ThS. LÊ HOÀNH PHỒ

Nhà giáo ưu tú



# BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN HÌNH HỌC

11

- Dành cho HS lớp 11 ôn tập & nâng cao kĩ năng làm bài.
- Chuẩn bị cho các kì thi quốc gia do Bộ GD&ĐT tổ chức.



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI



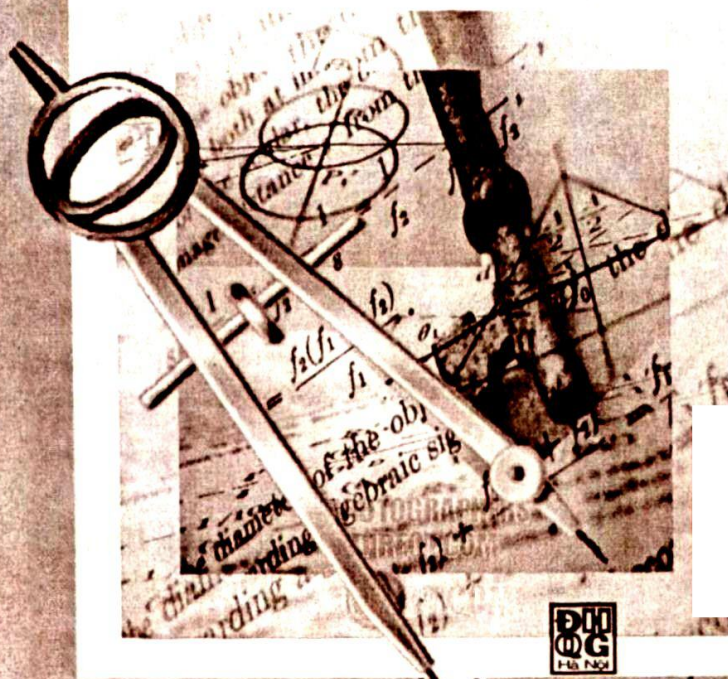
ThS. LÊ HOÀNH PHỒ  
Nhà giáo ưu tú



# BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN HÌNH HỌC

- Dành cho HS lớp 11 ôn tập & nâng cao kỹ năng làm bài.
- Chuẩn bị cho các kì thi quốc gia do Bộ GD&ĐT tổ chức.

11



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI



**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**

16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội

ĐT (04) 39714896; (04) 39724770. Fax: (04) 39714899

\*\*\*

***Chịu trách nhiệm xuất bản:***

*Giám đốc* PHÙNG QUỐC BẢO  
*Tổng biên tập* PHẠM THỊ TRÂM

*Biên tập nội dung*

BÍCH HẠNH

*Sửa bài*

ANH THƯ

*Chế bản*

CÔNG TI ANPHA

*Trình bày bìa*

SƠN KỲ

*Đối tác liên kết xuất bản*

CÔNG TI ANPHA

SÁCH LIÊN KẾT

**BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN HÌNH HỌC 11**

Mã số: 1L-262DH2009

In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Công ty TNHH In Bao bì Hưng Phú

Số xuất bản: 895 - 2009/CXB/09 - 155/ĐHQGHN, ngày 28/9/2009

Quyết định xuất bản số: 262 LK-TN/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2009.



## LỜI NÓI ĐẦU

Để giúp cho học sinh lớp 11 có thêm tài liệu tự bồi dưỡng, nâng cao và rèn luyện kỹ năng giải toán theo chương trình phân ban mới. Trung tâm sách giáo dục ANPHA xin trân trọng giới thiệu quý bạn đồng nghiệp và các em học sinh cuốn: “Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Hình học 11” này.

Cuốn sách này nằm trong bộ sách 6 cuốn gồm:

- Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Hình học 10.
- Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Đại số 10.
- Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Hình học 11.
- Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Đại số - Giải tích 11.
- Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Hình học 12.
- Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Giải tích 12.

do nhà giáo ưu tú, Thạc sĩ Lê Hoàn Phò tổ chức biên soạn. Nội dung sách được biên soạn theo chương trình phân ban: cơ bản và nâng cao mới của bộ GD & ĐT, trong đó một số vấn đề được mở rộng với các dạng bài tập hay và khó để phục vụ cho các em yêu thích muốn nâng cao toán học, có điều kiện phát triển tốt nhất khả năng của mình. Cuốn sách là sự kế thừa những hiểu biết chuyên môn và kinh nghiệm giảng dạy của chính tác giả trong quá trình trực tiếp đứng lớp bồi dưỡng cho học sinh giỏi các lớp chuyên toán.

Với nội dung súc tích, tác giả đã cố gắng sắp xếp, chọn lọc các bài toán tiêu biểu cho từng thể loại khác nhau ứng với nội dung của SGK. Một số bài tập có thể khó nhưng cách giải được dựa trên nền tảng kiến thức và kỹ năng cơ bản. Học sinh cần tự mình hoàn thiện các kỹ năng cũng như phát triển tư duy qua việc giải các bài tập có trong sách trước khi đối chiếu với lời giải có trong sách này, có thể một số lời giải có trong sách còn cô đọng, học sinh có thể tự mình làm rõ hơn, chi tiết hơn, cũng như tự mình đưa ra những cách lập luận mới hơn.

Chúng tôi hy vọng bộ sách này sẽ là một tài liệu thiết thực, bổ ích cho người dạy và học, đặc biệt các em học sinh yêu thích môn toán và học sinh chuẩn bị cho các kỳ thi quốc gia do bộ GD & ĐT tổ chức sắp tới.

Trong quá trình biên soạn, cuốn sách này không thể tránh khỏi những thiếu sót, chúng tôi rất mong nhận được góp ý của bạn đọc gần xa để bộ sách hoàn thiện hơn trong lần tái bản.

Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ:

- **Trung tâm sách giáo dục Anpha**  
225C Nguyễn Tri Phương, P.9, Q.5, Tp. HCM.
- **Cổng ti sách - thiết bị giáo dục Anpha**  
50 Nguyễn Văn Sang, Q. Tân Phú, Tp. HCM.  
ĐT: 08. 62676463, 38547464.

Email: [alphabookcenter@yahoo.com](mailto:alphabookcenter@yahoo.com)

Xin chân thành cảm ơn!

*Tác giả.*



# **PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẪNG**

## **§1. PHÉP BIẾN HÌNH**

– Định nghĩa: Phép biến hình trong mặt phẳng là một quy tắc để với mỗi điểm  $M$  thuộc mặt phẳng, xác định được một điểm duy nhất  $M'$  thuộc mặt phẳng ấy. Điểm  $M'$  gọi là ảnh của điểm  $M$  qua phép biến hình đó.

Đặc biệt, với mỗi điểm  $M$ , ta xác định điểm  $M'$  trùng với  $M$  thì ta cũng được một phép biến hình. Phép biến hình đó gọi là phép đồng nhất.

– Nếu ta kí hiệu một phép biến hình là  $F$  và điểm  $M'$  là ảnh của điểm  $M$  qua phép biến hình  $F$  thì ta viết  $M' = F(M)$ , hoặc  $F(M) = M'$ . Khi đó, ta còn nói phép biến hình  $F$  biến điểm  $M$  thành điểm  $M'$ .

Với mỗi hình  $(H)$ , ta gọi hình  $(H')$  gồm các điểm  $M' = F(M)$ , trong đó  $M \in (H)$ , là ảnh của  $(H)$  qua phép biến hình  $F$ , và viết  $(H') = F((H))$ .

## **§2. PHÉP DỜI HÌNH**

### **A. KIẾN THỨC CƠ BẢN**

– Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

$$F: \begin{array}{l} M \longrightarrow M' \\ N \longrightarrow N' \end{array} \quad \text{thì } M'N' = MN$$

– Định lí cơ bản: Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, biến góc thành góc bằng nó.

– Phép tịnh tiến theo vector  $\vec{v}$  cho trước, là phép biến mỗi điểm  $M$  thành điểm  $M'$  sao cho  $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ , kí hiệu  $T_{\vec{v}}$ .



– Phép đối xứng qua đường thẳng  $d$  là phép biến mỗi điểm  $M$  của mặt phẳng thành điểm  $M'$  đối xứng với  $M$  qua  $d$ . Phép đối xứng đó gọi là phép đối xứng trục, kí hiệu là  $\mathcal{D}_d$ .

– Đường thẳng  $d$  gọi là trục đối xứng của hình  $(H)$  nếu phép đối xứng trục  $\mathcal{D}_d$  biến  $(H)$  thành chính nó.

– Phép đối xứng qua điểm  $O$  là phép biến mỗi điểm  $M$  thành điểm  $M'$  đối xứng với  $M$  qua  $O$ . Phép đối xứng đó gọi là phép đối xứng tâm, kí hiệu là  $\mathcal{D}_O$ .

Điểm  $O$  gọi là tâm đối xứng của hình  $(H)$  nếu phép đối xứng tâm  $\mathcal{D}_O$  biến  $(H)$  thành chính nó.

– Phép quay tâm  $O$  góc quay  $\varphi$ , biến điểm  $O$  thành  $O$  và biến mỗi điểm  $M$  khác  $O$  thành  $M'$  sao cho  $OM' = OM$ ,  $(OM, OM') = \varphi$ , kí hiệu  $Q_{(O, \varphi)}$ .

– Các phép đồng nhất, phép tịnh tiến, phép đối xứng tâm, phép đối xứng trục, phép quay đều là phép dời hình.

– Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.

## B. PHÂN DẠNG TOÁN

### DẠNG 1: CÁC PHÉP DỜI HÌNH

• Để chứng minh phép biến hình  $F$  là một phép dời hình, ta lấy 2 điểm  $M$  và  $N$  bất kì, xác định 2 ảnh  $M'$  và  $N'$  rồi chứng minh  $M'N' = MN$  theo các hướng sau đây:

- dùng quan hệ hình học;
- dùng hệ thức về vectơ để suy ra quan hệ độ dài;
- dùng phương pháp tọa độ.

• Hợp thành của hai phép dời hình liên tiếp:

$F_1: M \longmapsto M'$  và  $F_2: M' \longmapsto M''$ . Xác định quy tắc biến  $M$  thành  $M''$  theo các hướng sau đây:

- Nếu  $M''$  luôn trùng với  $M$  thì hợp thành là phép đồng nhất.
- Nếu  $\overrightarrow{MM''} = \vec{v}$ : xác định thì hợp thành là phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{v}$ .
- Nếu đoạn  $MM''$  có trung điểm  $O$  cố định thì hợp thành là phép đối xứng tâm  $O$ .
- Nếu trung trực của  $MM''$  là  $d$  cố định thì hợp thành là phép đối xứng trục  $d$ .
- Nếu có một điểm  $O$  cố định và góc lượng giác  $\varphi$  không đổi mà  $OM'' = OM$  và  $(OM, OM'') = \varphi$  thì hợp thành là phép quay tâm  $O$  với góc quay  $\varphi$ .



**Ví dụ 1:** Chứng minh các phép tịnh tiến, đối xứng tâm, đối xứng trục và phép quay đều là các phép dời hình.

**Giải**

– Phép tịnh tiến theo vector  $\vec{v}$  biến M thành M', N thành N' thì:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM'} = \overrightarrow{NM'} + \overrightarrow{M'N'}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'} \Rightarrow MN = M'N'.$$

Vậy phép tịnh tiến là phép dời hình.

– Phép đối xứng tâm O biến M thành M', biến N thành N' thì

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}, \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{ON'} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{ON'} = \vec{0}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{N'M'} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{M'N'} \Rightarrow MN = M'N'.$$

Vậy phép đối xứng tâm là phép dời hình.

– Phép đối xứng trục d. Chọn hệ trục Oxy mà d là trục hoành, biến M(x<sub>1</sub>; y<sub>1</sub>) thành M'(x<sub>1</sub>; -y<sub>1</sub>), N(x<sub>2</sub>; y<sub>2</sub>) thành N'(x<sub>2</sub>; -y<sub>2</sub>) ta có:

$$M'N' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = MN.$$

Vậy phép đối xứng trục là phép dời hình

Phép quay Q<sub>(O; φ)</sub> biến điểm M thành M' và biến điểm N thành N'.

Ta có: OM = OM'; ON = ON'

$$\text{và } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{ON'}) = \varphi.$$

Theo hệ thức Sa-lơ về góc lượng giác:

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) &= (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) + (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON}) \\ &= (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{ON'}) + (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON'}) \end{aligned}$$

Suy ra  $\widehat{MON} = \widehat{M'ON'}$

• Khi O, M, N không thẳng hàng thì hai tam giác MON và M'ON' bằng nhau, do đó M'N' = MN.

Khi O, M, N thẳng hàng thì M'N' = MN.

Vậy phép quay là phép dời hình

**Ví dụ 2:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép biến hình nào sau đây là phép dời hình:

a) Phép biến hình F<sub>1</sub> biến mỗi điểm M = (x; y) thành điểm M' = (y; -x).

b) Phép biến hình F<sub>2</sub> biến mỗi điểm M = (x; y) thành điểm M' = (2x; y).

**Giải**

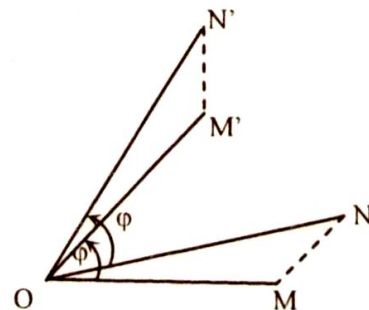
Lấy hai điểm bất kì M = (x<sub>1</sub>; y<sub>1</sub>) và N = (x<sub>2</sub>; y<sub>2</sub>), ta có:

$$MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

a) Ảnh của M, N qua F<sub>1</sub> lần lượt là M' = (y<sub>1</sub>; -x<sub>1</sub>) và N' = (y<sub>2</sub>; -x<sub>2</sub>)

Ta có:

$$M'N' = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (-x_1 + x_2)^2} = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}$$





Do đó  $M'N' = MN$ , vậy  $F_1$  là phép dời hình.

b) Ảnh của M, N qua  $F_2$  lần lượt là  $M' = (2x_1; y_1)$  và  $N' = (2x_2; y_2)$

$$\text{Ta có: } M'N' = \sqrt{4(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Do đó nếu  $x_1 \neq x_2$  thì đoạn  $M'N'$  khác  $MN$ , vậy  $F_2$  không phải là phép dời hình.

**Ví dụ 3:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, với  $\alpha, a, b$  là những số cho trước, xét phép biến hình F biến mỗi điểm  $M(x; y)$  thành điểm  $M'(x'; y')$  trong đó:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + a \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + b \end{cases}$$

a) Chứng minh phép F là phép dời hình.

b) Khi  $\alpha = 0$ , chứng minh F là phép tịnh tiến.

**Giải**

a) Phép F biến điểm  $M(x_1; y_1)$  thành điểm  $M'(x'_1; y'_1)$ , điểm  $N(x_2; y_2)$  thành điểm  $N'(x'_2; y'_2)$

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha + a \\ y'_1 = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha + b \end{cases}, \begin{cases} x'_2 = x_2 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha + a \\ y'_2 = x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha + b \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\text{và } M'N' = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2}$$

$$= \sqrt{[(x_1 - x_2) \cos \alpha - (y_1 - y_2) \sin \alpha]^2 + [(x_1 - x_2) \sin \alpha + (y_1 - y_2) \cos \alpha]^2}$$

$$= \sqrt{[(x_1 - x_2)^2 \cos^2 \alpha + (y_1 - y_2)^2 \sin^2 \alpha + (x_1 - x_2)^2 \sin^2 \alpha + (y_1 - y_2)^2 \cos^2 \alpha]}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = MN.$$

Vậy phép F là phép dời hình

$$\text{b) Khi } \alpha = 0 \text{ ta có } \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Vậy F là phép tịnh tiến theo vector  $\vec{u}(a; b)$ .

**Ví dụ 4:** Chứng minh phép dời hình biến một đường tròn thành một đường tròn bằng nó.

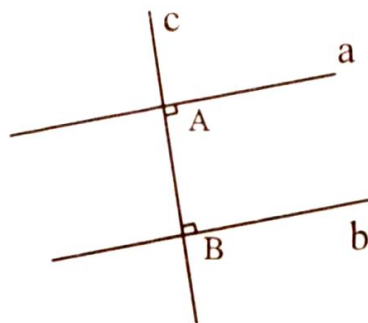
**Giải**

Giả sử cho đường tròn  $(O; R)$  và phép dời hình F. Gọi  $O' = F(O)$  và với mọi điểm  $M \in (O; R)$ , gọi  $M' = F(M)$ . Vì F là phép dời hình nên  $O'M' = OM = R$ . Vậy  $M' \in (O'; R)$ .

Ngược lại, cũng đúng nên phép dời hình F biến đường tròn  $(O; R)$  thành đường tròn  $(O'; R)$  bằng nó.



**Ví dụ 5:** Chứng minh rằng phép dời hình biến hai đường thẳng song song đã cho thành hai đường thẳng song song, sao cho khoảng cách giữa hai đường thẳng song song đã cho bằng khoảng cách giữa các ảnh của chúng.



**Giải**

Giả sử phép dời hình  $F$  biến hai đường thẳng song song  $a$  và  $b$  thành hai đường thẳng  $a'$  và  $b'$ . Ta lấy đường thẳng  $c$  nào đó vuông góc với  $a$  và  $b$ , cắt  $a$  và  $b$  lần lượt tại  $A$  và  $B$ . Khi đó  $F$  biến  $A$  thành  $A'$  nằm trên  $a'$ , biến  $B$  thành  $B'$  nằm trên  $b'$ . Vì  $a \perp AB$  và  $b \perp AB$  nên  $a' \perp A'B'$  và  $b' \perp A'B'$ . Vậy  $a' \parallel b'$  và vì  $AB = A'B'$  nên khoảng cách giữa  $a$  và  $b$  bằng khoảng cách giữa  $a'$  và  $b'$ .

**Ví dụ 6:** Một điểm gọi là bất động nếu nó trùng với ảnh của nó qua phép biến hình. Chứng minh một phép dời hình có hai điểm bất động là một phép đồng nhất hoặc là một phép đối xứng trục.

**Giải**

Gọi  $F$  là phép dời hình có hai điểm bất động  $A, B$ :  $F(A) = A, F(B) = B$ .

Lấy một điểm  $C$  không thẳng hàng với  $A, B$  và gọi  $C' = F(C)$ .

Nếu  $C' \equiv C$  thì  $F$  có ba điểm bất động không thẳng hàng. Giả sử  $F$  không phải là phép đồng nhất thì có một điểm  $M$  mà ảnh  $M'$  khác  $M$  ta có:  $AM = AM', BM = BM', CM = CM'$  nên  $A, B, C$  cách đều  $M$  và  $M'$  nên nằm trên trung trực của  $MM'$  do đó chúng thẳng hàng: vô lí. Vậy  $F$  là phép đồng nhất.

Nếu  $C'$  không trùng  $C$  thì  $AC = AC'$  và  $BC = BC'$  nên  $AB$  là trung trực của  $CC'$ . Khi đó  $F$  chính là phép đối xứng trục, với trục là đường thẳng  $AB$ .

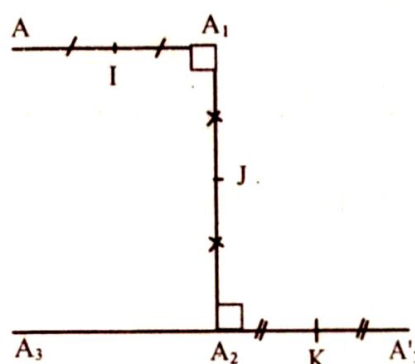
Kết quả: Nếu phép dời hình có ba điểm bất động không thẳng hàng thì phép dời hình đó là một phép đồng nhất.

**Ví dụ 7:** Chứng minh rằng nếu phép dời hình  $F$  biến mỗi đường thẳng  $a$  thành đường thẳng  $a'$  vuông góc với  $a$  thì  $F$  có một điểm duy nhất biến thành chính nó.

**Giải**

Trước hết,  $F$  không thể có hai điểm phân biệt biến thành chính nó vì khi đó đường thẳng đi qua hai điểm đó phải biến thành chính nó, trái với giả thiết là  $F$  biến đường thẳng thành đường thẳng vuông góc.

Để chứng minh sự tồn tại của điểm biến thành chính nó, lấy một điểm  $A$  nào đó và gọi  $A_1 = F(A), A_2 = F(A_1)$ .





Nếu  $A$  trùng  $A_1$  thì  $A$  là điểm biến thành chính nó, bởi vậy ta giả sử rằng  $A$  khác  $A_1$ . Khi đó ta có đoạn thẳng  $AA_1$  biến thành đoạn thẳng  $A_1A_2$  nên  $AA_1 = A_1A_2$ , ngoài ra có  $AA_1 \perp A_1A_2$  nên tam giác  $AA_1A_2$  vuông cân tại  $A_1$ .

Lấy điểm  $A_3$  sao cho  $AA_1A_2A_3$  là hình vuông và điểm  $A'_3$  là điểm đối xứng với  $A_3$  qua điểm  $A_2$ . Khi đó,  $F$  biến điểm  $A_2$  thành điểm  $A_3$  hoặc điểm  $A'_3$ . Ta chứng minh rằng nếu  $F$  biến  $A_2$  thành  $A'_3$  thì vô lí. Thật vậy, nếu ta gọi  $I, J, K$  lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng  $AA_1, A_1A_2, A_2A'_3$  thì  $F$  biến  $I$  thành  $J$  và biến  $J$  thành  $K$  mà  $IJ$  không vuông góc với  $JK$ , vô lí. Vậy  $F$  biến  $A_2$  thành  $A_3$  và cũng tương tự  $F$  biến  $A_3$  thành  $A$ . Như vậy  $F$  biến đoạn thẳng  $AA_2$  thành đoạn thẳng  $A_1A_3$ , suy ra  $F$  biến trung điểm của  $AA_2$  thành trung điểm của  $A_1A_3$ , tức là biến tâm  $O$  của hình vuông  $AA_1A_2A_3$  thành chính nó. Vậy  $F$  có duy nhất điểm  $O$  biến thành chính nó.

**Ví dụ 8:** Giả sử phép dời hình  $F$  biến điểm  $I$  đã cho thành chính nó và biến một điểm  $M$  khác  $I$  thành điểm  $M'$  không trùng với  $M$ .

- Tìm những đường tròn biến thành chính nó qua phép dời hình  $F$ .
- Chứng tỏ rằng nếu đường thẳng  $a$  không đi qua  $I$  thì  $F$  biến  $a$  thành đường thẳng  $a'$  không trùng với  $a$ .

### Giải

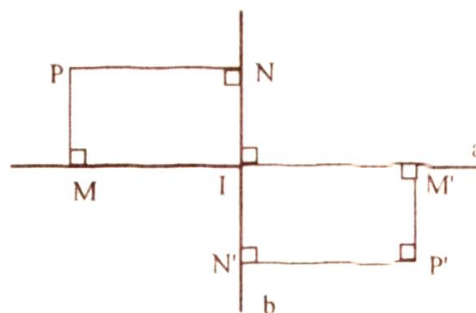
- Phép dời hình  $F$  biến mỗi đường tròn  $(O, R)$  thành đường tròn  $(O', R)$ , trong đó điểm  $O'$  là ảnh của điểm  $O$ . Nếu hai đường tròn đó trùng nhau thì  $O$  phải trùng với  $O'$  và do đó trùng với  $I$ . Vậy các đường tròn được biến thành chính nó khi và chỉ khi chúng có tâm là  $I$ .
- Giả sử  $a$  là đường thẳng không đi qua  $I$ . Hạ  $IH \perp a, H \in a$ . Khi đó  $F$  biến  $H$  thành  $H'$ , biến đường thẳng  $IH$  thành đường thẳng  $IH'$  và biến đường thẳng  $a$  thành đường thẳng  $a'$  đi qua  $H'$  và vuông góc với  $IH'$  tại  $H'$ . Chú ý rằng vì  $a$  không đi qua  $I$  nên  $H$  không trùng với  $H'$ . Từ đó, suy ra  $a'$  không trùng với  $a$ .

**Ví dụ 9:** Cho đường thẳng  $a$  và một điểm  $I$  nằm trên nó. Gọi  $F$  là phép dời hình biến  $a$  thành  $a$  và  $I$  là điểm duy nhất biến thành chính nó. Chứng minh rằng  $F$  biến điểm  $M$  bất kì thành điểm  $M'$  sao cho  $I$  là trung điểm  $MM'$ .

### Giải

Lấy điểm  $M$  bất kì nằm trên  $a$  và khác  $I$ , phép dời hình  $F$  biến  $a$  thành  $a$  nên biến điểm  $M$  thành điểm  $M'$  trên  $a, IM = IM'$ . Ngoài ra vì  $M$  khác  $M'$  nên  $I$  là trung điểm của  $MM'$ .

Gọi  $b$  là đường thẳng đi qua  $I$  vuông góc với  $a$  thì  $F$  biến  $b$  thành đường thẳng đi qua  $I$  và vuông góc với  $a$ . Do đó  $b$





biến thành b. Cũng lập luận như trên, nếu N nằm trên b thì F biến N thành N' sao cho I là trung điểm của NN'. Giả sử điểm P không nằm trên a và b. Hạ  $PM \perp a$  và  $PN \perp b$  ( $M \in a, N \in b$ ). Theo trên M biến thành M', N biến thành N' sao cho I là trung điểm của MM' và NN'. Suy ra P biến thành điểm P' sao cho M'IN'P' là hình chữ nhật và do đó I là trung điểm của PP'.

**Ví dụ 10:** Có hay không một phép dời hình F sao cho mọi đường thẳng đều biến thành đường thẳng song song với nó?

**Giải**

Nếu F là phép dời hình có tính chất đã cho thì F không có điểm biến thành chính nó, vì nếu I là điểm như thế thì đường thẳng a đi qua I biến thành đường thẳng a' cũng đi qua I nên đường thẳng a' không song song với a.

Ta lấy một điểm A bất kì, gọi  $A' = F(A)$  và  $A'' = F(A')$  thì đường thẳng a đi qua A và A' biến thành đường thẳng a' đi qua A' và A'', do đó a và a' cắt nhau tại A', vô lí. Vậy không có phép dời hình F có tính chất đã cho.

**Ví dụ 11:** Cho 2 tam giác bằng nhau ABC và A'B'C'. Chứng minh có phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'.

**Giải**

Xét phép biến hình, F biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho nếu

$$\overrightarrow{CM} = p\overrightarrow{CA} + q\overrightarrow{CB}$$

$$\text{thì } \overrightarrow{C'M'} = p\overrightarrow{C'A'} + q\overrightarrow{C'B'}.$$

Ta chứng minh F là phép dời hình. Giả sử F biến N thành N', nếu  $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$  thì  $\overrightarrow{C'N'} = k\overrightarrow{C'A'} + t\overrightarrow{C'B'}$ .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = (k - p)\overrightarrow{CA} + (t - q)\overrightarrow{CB}$$

$$\Rightarrow MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = (k - p)^2 CA^2 + (t - q)^2 CB^2 + 2(k - p)(t - q)\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$$

$$\text{Tương tự: } M'N'^2 = \overrightarrow{M'N'}^2$$

$$= (k - p)^2 C'A'^2 + (t - q)^2 C'B'^2 + 2(k - p)(t - q)\overrightarrow{C'A'} \cdot \overrightarrow{C'B'}$$

Vì hai tam giác ABC và A'B'C' bằng nhau nên  $CA = C'A'$ ,  $CB = C'B'$  và  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{C'A'} \cdot \overrightarrow{C'B'}$ . Do đó  $MN = M'N'$  hay F là phép dời hình, biến A, B, C lần lượt thành A', B', C'  $\Rightarrow$  đpcm.

**Ví dụ 12:** Cho hai tam giác bằng nhau ABC và A'B'C' ( $AB = A'B'$ ,  $BC = B'C'$ ,  $AC = A'C'$ ). Chứng minh rằng có không quá một phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'.

**Giải**

Giả sử có hai phép dời hình khác nhau  $F_1$  và  $F_2$  cùng biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'. Khi đó, có ít nhất một điểm M sao cho  $F_1$  biến M thành  $M'_1$  và  $F_2$  biến M thành  $M'_2$  khác  $M'_1$ . Khi đó ta có:

ABC



$AM = A'M'_1$  và  $AM = A'M'_2$  nên  $A'M'_1 = A'M'_2$  hay  $A'$  nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng  $M'_1M'_2$ . Tương tự  $B', C'$  cũng nằm trên trung trực đó. Suy ra ba điểm  $A', B', C'$  thẳng hàng, vô lí.

**Ví dụ 13:** Chứng minh rằng hợp thành của hai hay nhiều phép dời hình là một phép dời hình.

### Giải

Vì mỗi phép dời hình đều không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì, nên hợp thành của chúng cũng có tính chất đó, bởi vậy hợp thành của 2 hay nhiều phép dời hình cũng là phép dời hình.

**Ví dụ 14:** Chứng minh rằng hợp thành của một số hữu hạn các phép tịnh tiến là một phép tịnh tiến.

### Giải

Cho phép tịnh tiến  $T_1$  theo vector  $\vec{u}_1$  và phép tịnh tiến  $T_2$  theo vector  $\vec{u}_2$ . Gọi  $F$  là phép hợp thành của  $T_1$  và  $T_2$ . Giả sử  $T_1$  biến điểm  $M$  thành điểm  $M_1$  và  $T_2$  biến điểm  $M_1$  thành  $M_2$ , tức là:

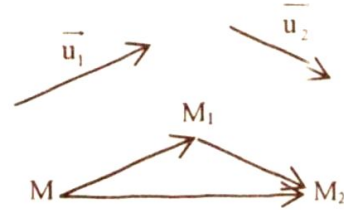
$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{u}_1 ; \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{u}_2$$

Suy ra:  $\overrightarrow{MM_2} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$  : xác định

Vì phép hợp thành  $F$  biến  $M$  thành  $M_2$

nên  $F$  là phép tịnh tiến theo vector:  $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ .

Một cách tổng quát: Hợp thành của một số hữu hạn phép tịnh tiến là một phép tịnh tiến theo vector tổng của các vector tịnh tiến của các phép tịnh tiến đó.



**Ví dụ 15:** Chứng minh:

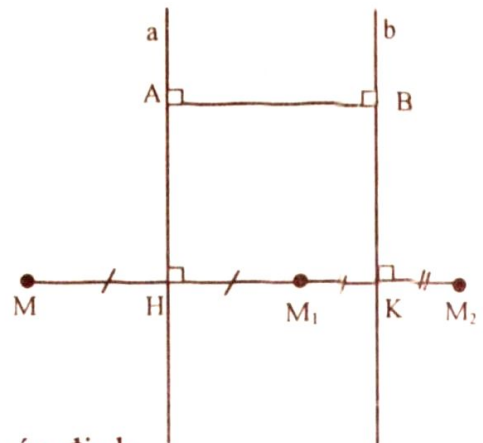
- Hợp thành của hai phép đối xứng trục có các trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến.
- Mỗi phép tịnh tiến đều có thể xem là hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục đối xứng song song bằng nhiều cách.

### Giải

- Giả sử  $\mathcal{D}_a$  và  $\mathcal{D}_b$  là các phép đối xứng trục có trục là  $a$  và  $b$  mà  $a \parallel b$  và  $F$  là hợp thành của  $\mathcal{D}_a$  và  $\mathcal{D}_b$ . Lấy hai điểm  $A, B$  lần lượt nằm trên  $a, b$  sao cho  $AB \perp a$ . Với điểm  $M$  bất kì,  $\mathcal{D}_a$  biến  $M$  thành  $M_1$  và  $\mathcal{D}_b$  biến  $M_1$  thành  $M_2$ . Nếu gọi  $H$  và  $K$  lần lượt là trung điểm của  $MM_1$  và  $M_1M_2$  thì :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM_2} &= \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} \\ &= 2(\overrightarrow{HM_1} + \overrightarrow{M_1K}) = 2\overrightarrow{HK} = 2\overrightarrow{AB} : \text{xác định} \end{aligned}$$

Vì phép hợp thành  $F$  biến  $M$  thành  $M_2$  mà  $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{AB}$  nên  $F$  là phép tịnh tiến theo vector  $2\overrightarrow{AB}$





- b) Giả sử  $T$  là phép tịnh tiến theo vector  $\vec{u}$ . Lấy một đường thẳng  $a$  nào đó vuông góc với  $\vec{u}$  và đường thẳng  $b$  là ảnh của  $a$  qua phép tịnh tiến theo vector  $\frac{1}{2}\vec{u}$  thì phép tịnh tiến  $T$  là hợp thành của phép đối xứng trục  $D_a$  và phép đối xứng trục  $D_b$ . Vì có nhiều cách chọn đường thẳng  $a$ , nên có nhiều phép đối xứng  $D_a$  và  $D_b$  có hợp thành là  $T$ .

**Ví dụ 16:** Chứng minh:

- Hợp thành của một số chẵn các phép đối xứng có trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến.
- Hợp thành của một số lẻ các phép đối xứng có trục đối xứng song song là một phép đối xứng trục.

**Giải**

- Hợp thành của hai phép đối xứng có trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến. Vì vậy, hợp thành của  $2n$  phép đối xứng trục có trục đối xứng song song là hợp thành của  $n$  phép tịnh tiến, do đó cũng là phép tịnh tiến.
- Giả sử  $F$  là hợp thành của  $2n + 1$  phép đối xứng. Gọi phép đối xứng thứ nhất là  $D_a$  có trục là đường thẳng  $a$ ,  $2n$  phép đối xứng còn lại có hợp thành là phép tịnh tiến  $T$ . Ta có thể xem  $T$  là hợp thành của hai phép đối xứng mà phép thứ nhất là  $D_a$  và phép thứ hai là  $D_b$ . Vậy  $F$  là hợp thành của ba phép đối xứng:  $D_a$ ,  $D_a$  và  $D_b$ . Nhưng vì hợp thành của  $D_a$  và  $D_a$  là phép đồng nhất  $e$  nên  $F$  chính là phép đối xứng  $D_b$ .

**Ví dụ 17:** Cho phép đối xứng trục  $D_a$  qua đường thẳng  $a$  và phép tịnh tiến  $T$  theo vector  $\vec{v}$  vuông góc với  $a$ . Chứng minh rằng hợp thành của  $D_a$  và  $T$  là phép đối xứng trục, hợp thành của  $T$  và  $D_a$  cũng là phép đối xứng trục.

**Giải**

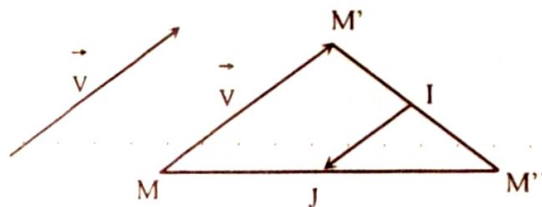
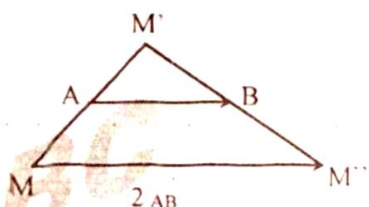
Có thể xem phép tịnh tiến  $T$  là hợp thành của hai phép đối xứng trục  $D_b$  và  $D_c$ . Vì vector tịnh tiến vuông góc với  $a$  nên  $a \parallel b \parallel c$ . Do đó, ta được hợp thành của ba phép đối xứng có trục song song. Vậy ta được một phép đối xứng trục.

Cách khác: Sử dụng định nghĩa để tìm quan hệ giữa  $M$  và ảnh  $M''$ .

**Ví dụ 18:** Chứng minh hợp thành của  $k$  phép đối xứng tâm là phép tịnh tiến hoặc đối xứng tâm.

**Giải**

Ta có hợp thành của 2 phép đối xứng tâm  $A$  và  $B$  là phép tịnh tiến theo vector  $2\overrightarrow{AB}$ . Do đó, hợp thành của  $k = 2n$  phép đối xứng tâm  $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$  là phép tịnh tiến theo vector  $2(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \dots + \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}})$





Ta có hợp thành của phép tịnh tiến  $\vec{v}$  và phép đối xứng tâm I là phép đối xứng tâm J sao cho  $\vec{IJ} = -\frac{1}{2} \vec{v}$ .

Do đó hợp thành của  $k = 2n + 1$  phép đối xứng tâm  $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$  là phép đối xứng tâm O sao cho:

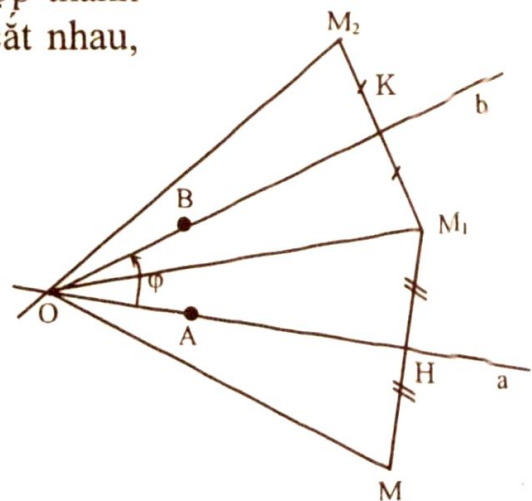
$$\overrightarrow{A_{2n+1}O} = -(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \dots + \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}})$$

**Ví dụ 19:** Chứng minh:

- Hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục cắt nhau là một phép quay.
- Mỗi phép quay đều có thể xem là hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục cắt nhau, bằng nhiều cách. K

**Giải**

Giả sử cho hai phép đối xứng trục  $\mathcal{D}_a$  và  $\mathcal{D}_b$  có trục  $a$  và  $b$  cắt nhau tại O, còn F là hợp thành của  $\mathcal{D}_a$  và  $\mathcal{D}_b$ . Lấy hai điểm A, B khác O lần lượt nằm trên  $a, b$  sao cho góc AOB không tù và đặt  $\varphi = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ . Với mọi điểm M khác O, giả sử  $\mathcal{D}_a$  biến M thành  $M_1$  và  $\mathcal{D}_b$  biến  $M_1$  thành  $M_2$ .



Khi đó, nếu gọi H và K lần lượt là trung điểm của  $MM_1$  và  $M_1M_2$  thì ta có:  $OM = OM_1 = OM_2$

$$\begin{aligned} \text{và } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}) &= (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) \\ &= 2(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM_1}) + 2(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OK}) \\ &= 2(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OK}) = 2\varphi. \end{aligned}$$

Vậy phép hợp thành F là phép quay tâm O góc quay  $2\varphi$ .

- Giả sử Q là phép quay tâm O góc quay  $\varphi$ . Ta lấy đường thẳng  $a$  nào đó đi qua O và  $b$  là ảnh của  $a$  qua phép quay tâm O góc quay  $\frac{\varphi}{2}$  thì hợp thành hai phép đối xứng trục  $\mathcal{D}_a$  và  $\mathcal{D}_b$  chính là phép quay Q.

**Ví dụ 20:** Chứng minh:

- Hợp thành của một số chẵn các phép đối xứng có trục đối xứng đồng quy là một phép quay.
- Hợp thành của một số lẻ các phép đối xứng trục có trục đối xứng đồng quy là một phép đối xứng trục.

**Giải**

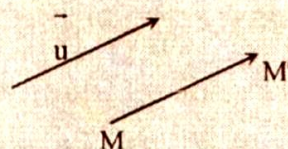
- Nếu F là hợp thành của  $2n$  phép đối xứng có trục đối xứng đồng quy tại O thì F là hợp thành của  $n$  phép quay có tâm O và do đó F là một phép quay.



- b) Giả sử  $F$  là hợp thành của  $2n + 1$  phép đối xứng trục có các trục đều đi qua  $O$ . Gọi  $D_a$  là phép đối xứng đầu tiên, thì  $2n$  phép đối xứng trục còn lại có hợp thành là phép quay  $Q$  tâm  $O$ . Ta xem  $Q$  là hợp thành của hai phép đối xứng trục, trong đó phép thứ nhất là  $D_a$  và phép thứ hai là  $D_b$ . Như vậy  $F$  là hợp thành của ba phép đối xứng trục:  $D_a$ ,  $D_a$  và  $D_b$ . Vậy  $F$  chính là phép đối xứng trục  $D_b$ .

## DẠNG 2: PHÉP TỊNH TIẾN

- Phép tịnh tiến theo vector  $\vec{u}$  là một phép biến hình biến điểm  $M$  thành điểm  $M'$  sao cho  $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ .



Phép tịnh tiến theo vector  $\vec{u}$  thường được kí hiệu là  $T$  hoặc  $T_{\vec{u}}$ . Vector  $\vec{u}$  được gọi là vector tịnh tiến.

Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

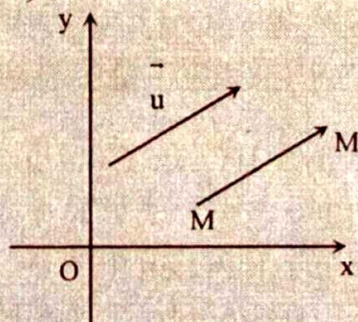
Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, biến góc thành góc bằng nó.

- Trong mặt phẳng Oxy cho điểm  $M(x; y)$ ,  $\vec{v}(a; b)$ .

Gọi điểm  $M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M)$ .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Chú ý: – Để xác định ảnh ta có thể dùng định nghĩa hay công thức tọa độ kết hợp các tính chất chung của phép dời hình.



– Để xác định điểm ta thường tìm tương giao. Thông thường điểm cần tìm thuộc một đường đã biết và một đường là ảnh qua phép tịnh tiến, do đó điểm cần tìm là điểm chung. Bài toán dựng hình đầy đủ có 4 bước: phân tích, dựng hình, chứng minh và biện luận, tuy nhiên có thể lược giản đi.

– Để tìm quỹ tích (tập hợp điểm), nếu có phép tịnh tiến biến điểm  $M$  thành  $M'$  và  $(C)$  là tập hợp điểm của  $M$  thì ảnh  $(C')$  là tập hợp điểm của  $M'$ .

**Ví dụ 1:** Cho phép tịnh tiến vector  $\vec{u}$  biến  $M$  thành  $M'$ , biến  $N$  thành  $N'$ .

Chứng minh  $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ .

**Giải**

Theo định nghĩa ta có:  $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} = \overrightarrow{NN'}$

Do đó  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM'} = \overrightarrow{NM'} + \overrightarrow{MN'}$  nên  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$



**Ví dụ 2:** Chứng tỏ rằng qua phép tịnh tiến, một đường thẳng  $a$  biến thành đường thẳng  $a'$  song song hoặc trùng với  $a$ .

**Giải**

Cho phép tịnh tiến  $T_{\vec{v}}$  biến đường thẳng  $a$  thành đường thẳng  $a'$ . Nếu đường thẳng  $a$  song song với vector  $\vec{v}$  thì mỗi điểm thuộc  $a$  lại biến thành một điểm thuộc  $a$ , vậy  $a$  biến thành chính nó hay là  $a'$  trùng với  $a$ .

Nếu đường thẳng  $a$  không song song với  $\vec{v}$  thì ta lấy hai điểm  $A, B$  nào đó nằm trên  $a$  và gọi  $A', B'$  là ảnh của  $A, B$  qua phép tịnh tiến  $T_{\vec{v}}$ , tức là

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{v}$ . Khi đó ảnh của đường thẳng  $a$  là đường thẳng  $a'$  đi qua  $A'$  và  $B'$ . Vì  $AA'B'B$  là hình bình hành nên  $a' \parallel a$ .

Kết quả: Đường thẳng và ảnh của nó không cắt nhau.

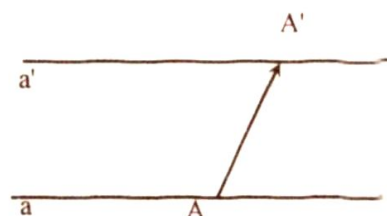
**Ví dụ 3:** Cho hai đường thẳng song song  $a$  và  $a'$ . Tìm tất cả những phép tịnh tiến biến  $a$  thành  $a'$ .

**Giải**

Lấy điểm  $A$  bất kì trên  $a$  thì với mỗi điểm  $A'$  trên  $a'$ , phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{AA'}$  biến  $a$  thành  $a'$ .

Đó là tất cả những phép tịnh tiến cần tìm.

Vậy có vô số phép tịnh tiến.



**Ví dụ 4:** Cho tam giác  $ABC$ , vẽ ra ngoài hình chữ nhật  $BCDE$ . Các đường thẳng qua  $D$  và  $E$  lần lượt vuông góc với  $AB$  và  $AC$  cắt nhau tại  $K$ . Chứng minh  $AK$  vuông góc với  $BC$ .

**Giải**

Gọi  $BB'$  và  $CC'$  là hai đường cao của tam giác  $ABC$  và  $H$  là trực tâm của tam giác này.

Phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$  biến:

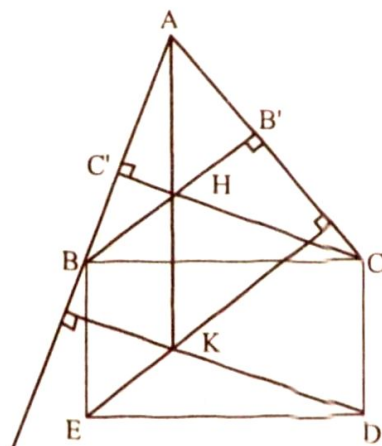
–  $BB'$  thành  $EK$  (vì  $EK \parallel BB'$ )

–  $CC'$  thành  $DK$  (vì  $DK \parallel CC'$ )

Mà  $BB'$  và  $CC'$  giao nhau tại  $H$  nên  $H$  và  $K$  là hai điểm tương ứng trong phép tịnh tiến này.

Do đó  $HK \parallel BE$  nên  $HK \perp BC$ .

Mà  $AH \perp BC$ , vậy  $A, H, K$  thẳng hàng, nghĩa là  $AK$  vuông góc với đường thẳng  $BC$ .



**Ví dụ 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $A_1, B_1, C_1$  là các trung điểm của ba cạnh  $BC, CA, AB$ . Gọi  $O_1, O_2, O_3$  và  $I_1, I_2, I_3$  tương ứng là các tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của ba tam giác  $AB_1C_1, BC_1A_1$  và  $CA_1B$ . Chứng minh  $\Delta O_1O_2O_3 = \Delta I_1I_2I_3$ .



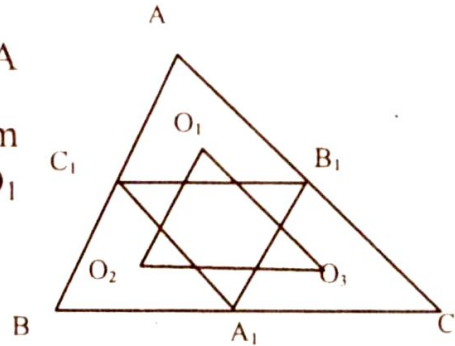
## Giải

Xét phép tịnh tiến theo vector  $\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$  biến A

thành  $C_1$ ,  $C_1$  thành  $B$ ,  $B_1$  thành  $A_1$  nên tam  
giác  $AC_1B_1$  thành tam giác  $C_1BA_1$ , do đó  $O_1$

thành  $O_2$  và  $I_1$  thành  $I_2$  nên  $\overrightarrow{O_1 O_2} = \overrightarrow{I_1 I_2}$

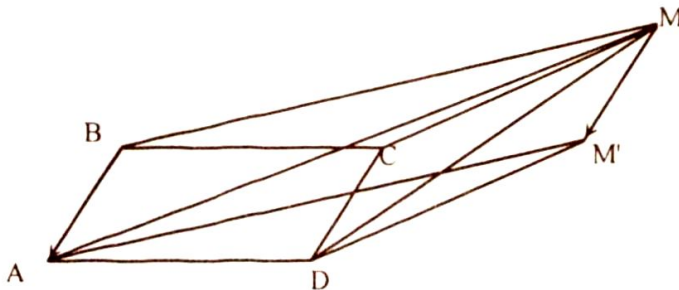
Tương tự  $\overrightarrow{O_2O_3} = \overrightarrow{I_2I_3}$  và  $\overrightarrow{O_3O_1} = \overrightarrow{I_3I_1}$

$$\Rightarrow \Delta O_1 O_2 O_3 = \Delta I_1 I_2 I_3 \text{ (c.c.c.)}.$$


**Ví dụ 6:** Cho hình bình hành ABCD và điểm M sao cho C nằm trong tam giác MBD. Giả sử  $\widehat{MBC} = \widehat{MDC}$ . Chứng minh  $\widehat{AMD} = \widehat{BMC}$

## Giải

Phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{BA}$  biến B thành A, C thành D, MC thành M'D  
 nên DCM'M' là hình bình hành, do đó  $\widehat{MDC} = \widehat{DMM'}$  và  $\widehat{MBC} = \widehat{M'AD}$



Mà  $\widehat{MBC} = \widehat{MDC}$  nên  $\widehat{DMM'} = \widehat{M'AD}$ .

Do đó AMM'D là tứ giác nội tiếp nên  $\widehat{AMD} = \widehat{AM'D}$

Hơn nữa, ta có:  $\widehat{BMC} = \widehat{A'MD}$  nên  $\widehat{AMD} = \widehat{BMC}$ .

**Ví dụ 7:** Cho tứ giác lồi ABCD không phải là hình thang. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng nếu MN tạo với các cạnh AD và BC những góc bằng nhau thì  $AD = BC$ .

## Giải

Dựng  $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{AD}$

Các tứ giác MBCE và MADF là hình bình hành nên ta có:

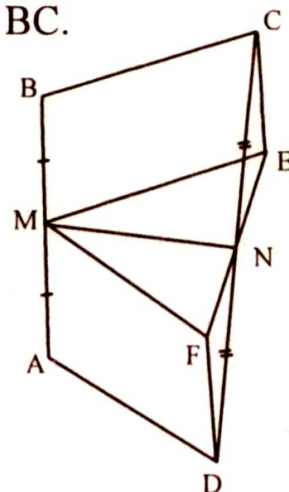
$CE = BM, DF = AM$  nên

$$CE = DF, CE \parallel DF.$$

Do đó tứ giác CEDF là hình bình hành  
nên hai đường chéo EF và CD giao  
nhau tại trung điểm N.

Theo giả thiết thì  $\widehat{EMN} = \widehat{NMF}$  nên tam giác EMF cân vì có đường phân giác vừa là trung tuyến.

Vậy  $ME = MF \Rightarrow BC = AD$ .



ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI  
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN

LC102667



**Ví dụ 8:** Cho phép tịnh tiến vector  $\vec{u}(-2; 3)$ . Tìm ảnh của:

- a) Điểm A(4; 1)
- b) Đường thẳng d:  $3x - 5y + 3 = 0$
- c) Đường tròn (C):  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$ .

**Giải**

Phép tịnh tiến theo vector  $\vec{u}(-2; 3)$  biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y')

thì ta có: 
$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

- a) Biến A(4; 1) thành A'(2; 4)
- b) Ta có  $x = x' + 2$ ,  $y = y' - 3$ . Thay vào phương trình của d ta được  $3(x' + 2) - 5(y' - 3) + 3 = 0$  hay  $3x' - 5y' + 24 = 0$ .  
Vậy phương trình của d' là:  $3x - 5y + 24 = 0$ .

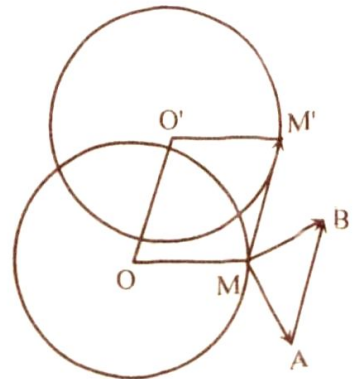
- c) Thay vào phương trình (C) ta được:  
 $(x' + 2)^2 + (y' - 3)^2 - 2(x' + 2) + 4(y' - 3) - 1 = 0$   
hay  $x'^2 + y'^2 + 2x' - 2y' - 4 = 0$ .

Vậy phương trình (C'):  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 4 = 0$ .

**Ví dụ 9:** Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B. Một điểm M thay đổi trên đường tròn (O). Tìm quỹ tích điểm M' sao cho  $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ .

**Giải**

Ta có  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$ : xác định nên phép tịnh tiến T theo vector  $\overrightarrow{AB}$  biến M thành M'. Nếu gọi O' là ảnh của O qua phép tịnh tiến T, tức là  $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}$  thì quỹ tích M' là đường tròn tâm O' có bán kính bằng bán kính đường tròn (O).



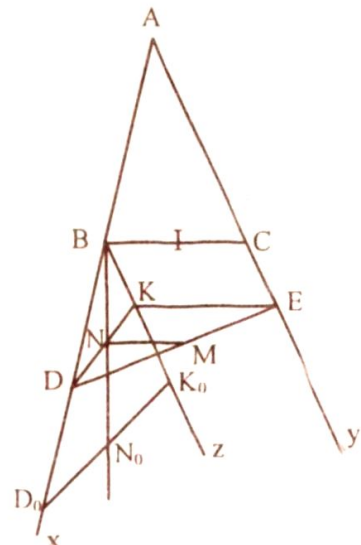
**Ví dụ 10:** Cho tam giác ABC cố định. Gọi Bx, Cy theo thứ tự là các tia đối của các tia BA, CA. Các điểm D, E thứ tự chuyển động trên các tia Bx, Cy. Tìm quỹ tích các trung điểm M của DE biết  $BD = 2CE$ .

**Giải**

Vẽ hình bình hành BCEK, ta có K ở trên tia Bz cố định song song cùng chiều với tia Cy. Trên hai tia Bx, Bz lần lượt lấy hai điểm cố định D<sub>0</sub>, K<sub>0</sub> sao cho  $BD_0 = 2BK_0$ .

Vì  $BD = 2CE = 2BK$  nên  $DK \parallel D_0K_0$ .

Gọi N và N<sub>0</sub> tương ứng là trung điểm của DK và D<sub>0</sub>K<sub>0</sub>. Ta có N<sub>0</sub> cố định và quỹ tích của N là tia BN<sub>0</sub>.





Gọi I là trung điểm của BC:  $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{KE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI}$  nên  $T_{\overrightarrow{BI}}$  biến N thành M.

Vậy quỹ tích của M là tia  $Im$  là ảnh của tia  $BN_0$  qua phép tịnh tiến  $T_{\overrightarrow{BI}}$  theo vector  $\overrightarrow{BI}$

**Ví dụ 11:** Trên đường tròn  $(O; R)$  cho hai điểm A, B cố định và điểm M lưu động. Gọi H là trực tâm của tam giác MAB. Tìm tập hợp:

- a) Điểm H                                      b) Điểm P sao cho tam giác MHP đều.

**Giải**

- a) Gọi I là trung điểm của AB và D là điểm đối xứng của M qua O. Tứ giác AHBD là hình bình hành nên hai đường chéo AB và HD giao nhau tại trung điểm I.

Do đó:  $\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{OI}$ : xác định.

Vậy tập hợp điểm H là đường tròn  $(O')$ , bán kính R với  $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OI}$

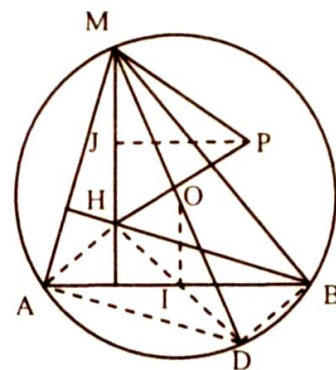
Cách khác: Vẽ đường kính AE thì  $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{EB}$ .

- b) Gọi J là trung điểm của MH ta có:  $\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{OI}$ .

Do đó J chạy trên đường tròn  $(C)$  tâm I bán kính R là hình tịnh tiến của đường tròn  $(O)$  bởi phép tịnh tiến  $\overrightarrow{OI}$ .

Vì  $JP = \frac{MH\sqrt{3}}{2} = OI\sqrt{3}$  không đổi và  $JP \perp MH$  nên  $JP \parallel AB$ .

Do đó  $\overrightarrow{JP} = \vec{v}$  xác định. Vậy tập hợp điểm P là đường tròn tịnh tiến của đường tròn  $(C)$  bởi phép tịnh tiến  $\vec{v}$ .



**Ví dụ 12:** Cho hình bình hành ABCD có đỉnh A cố định, BD có độ dài không đổi bằng  $2a$ , còn A, B, D nằm trên một đường tròn cố định tâm O, bán kính R. Tìm quỹ tích đỉnh C.

**Giải**

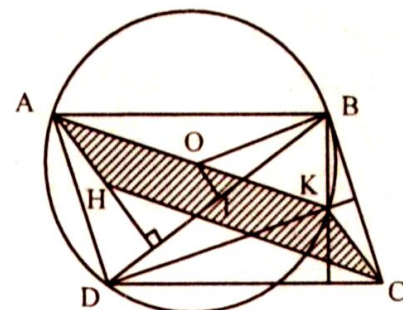
AO kéo dài cắt đường tròn ở K, nên K cố định. Gọi H là trực tâm tam giác ABD, I là trung điểm của BD. Từ đó suy ra:

$AH = 2OI = 2\sqrt{R^2 - a^2}$ : không đổi nên suy ra H nằm trên đường tròn tâm A, bán kính  $2\sqrt{R^2 - a^2}$ .

Do  $\widehat{ABK} = \widehat{ADK} = 90^\circ$ , mà  $AB \parallel DC$ ,  $AD \parallel BC$

$\Rightarrow BK \perp DC$  và  $DK \perp BC$  nên K là trực tâm tam giác BDC

$\Rightarrow CK \perp DB \Rightarrow CK \parallel AH$ .





Trong tam giác ACK, do OI là đường trung bình, nên  $KC = 2OI \Rightarrow KC = AH \Rightarrow AHCK$  là hình bình hành  
 $\Rightarrow \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AK}$ : xác định. Phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{AK}$  biến H thành C, biến A thành K.

Vậy quỹ tích của C là đường tròn tâm K, bán kính  $2\sqrt{R^2 - a^2}$ .

**Ví dụ 13:** Cho tam giác ABC cố định. Vẽ hình thoi BCDE mà E, D, A cùng phía đối với đường thẳng BC. Hạ  $DD_1 \perp AB$ , và  $EE_1 \perp AC$ . Các đường thẳng  $DD_1$  và  $EE_1$  cắt nhau tại M. Tìm quỹ tích M.

**Giải**

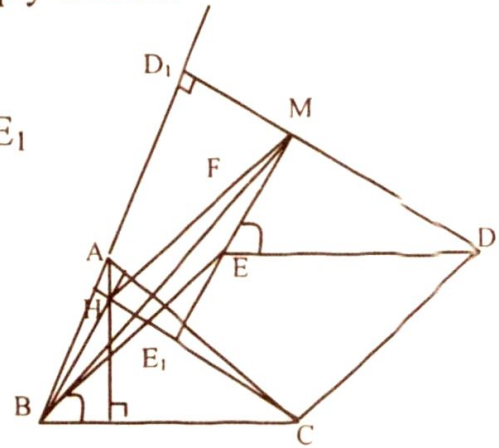
Gọi H là trực tâm tam giác ABC

$\Rightarrow H$  cố định. Ta có:  $HC \parallel DD_1$ ;  $HB \parallel EE_1$   
 (vì cùng vuông góc AC).

$\Rightarrow \widehat{MED} = \widehat{HBC}$  và  $\widehat{MDE} = \widehat{HCB}$   
 (góc có cạnh tương ứng song song)

$\Rightarrow \triangle MDE = \triangle HCB$  (g.c.g)

$\Rightarrow CH = MD$ . Mà  $CH \parallel MD$  nên  
 $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{CH}$ : xác định.



Phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{CH}$  biến D thành M và biến C thành H. Mà  $CD = BC$  không đổi nên D thuộc đường tròn  $(C; BC)$  nên quỹ tích các điểm M là đường tròn ảnh qua phép tịnh tiến  $\overrightarrow{CH}$ , chính là đường tròn  $(H; BC)$ .

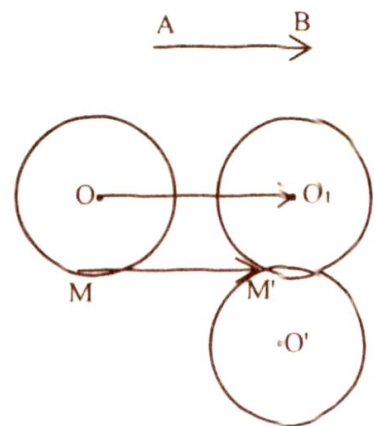
**Ví dụ 14:** Cho hai đường tròn (O) và (O') và hai điểm A, B. Tìm điểm M trên (O) và điểm M' trên (O') sao cho  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ .

**Giải**

Ta có  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ : xác định nên phép tịnh tiến  $\overrightarrow{AB}$  biến M thành M'.

Gọi  $(O_1)$  là ảnh của (O) qua phép tịnh tiến  $T_{\overrightarrow{AB}}$ , thì M' là giao điểm của  $(O_1)$  và  $(O')$ , còn M là điểm có ảnh là M' thì cặp điểm M, M' là cần tìm.

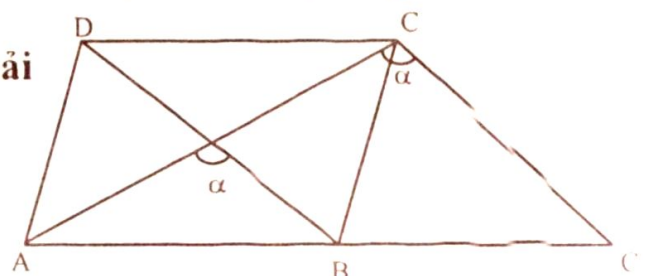
Bài toán có số nghiệm hình bằng số giao điểm của hai đường tròn  $(O_1)$  và  $(O')$ .



**Ví dụ 15:** Dựng hình bình hành cho biết hai cạnh liên tiếp và góc tạo bởi hai đường chéo.

**Giải**

– Phân tích: Giả sử ABCD là hình bình hành đã dựng được có  
 $AB = a$ ,  $BC = b$  và  $(AC, BD) = \alpha$ .





Gọi  $C'$  là ảnh của  $B$  qua phép tịnh tiến  $T_{\overline{AB}}$ .

Trong tam giác  $ACC'$  ta biết  $AC' = 2a$ ,  $BC = b$  là trung tuyến kẻ từ  $C$  và  $\widehat{ACC'} = \alpha$ .

- **Dựng hình:** Dựng  $AC' = 2a$ , trung điểm  $B$  của  $AC'$ , cung chứa góc  $\alpha$  trên dây  $AC'$ , cung tròn tâm  $B$ , bán kính  $b$ . Gọi  $C$  là điểm chung của hai cung tròn đã dựng. Dựng  $D$  là ảnh của  $C$  qua phép tịnh tiến  $T_{\overline{BA}}$ .

- **Chứng minh:** Theo cách dựng thì  $ABCD$  là hình bình hành thoả mãn đề bài.

- **Biên luận:** Bài toán có số nghiệm là số điểm chung của hai cung tròn.

**Ví dụ 16:** Cho hai đường tròn  $(C_1)$  và  $(C_2)$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Dựng qua  $A$  đường thẳng  $\Delta$  sao cho đoạn thẳng của đường thẳng đó nằm trong hai đường tròn có độ dài  $2m$  cho trước.

### Giải

Giả sử đã dựng được dây cung  $PQ$  qua  $A$ , sao cho  $P \in (C_1)$ ,  $Q \in (C_2)$  và  $PQ = 2m$ . Hạ  $O_1M$  và  $O_2N \perp PQ$ , phép tịnh tiến  $\overline{MO_1}$  biến  $N$  thành  $N'$ .

$$\text{Do đó } O_1N' = MN = \frac{1}{2}PQ = m$$

Điểm  $N'$  là đỉnh thứ ba của tam giác vuông  $O_1O_2N'$  có cạnh huyền  $O_1O_2$  và cạnh góc vuông

$$O_2N' = \sqrt{O_1O_2^2 - m^2}.$$

Từ đó suy ra cách dựng như sau:

- Dựng tam giác vuông  $N'O_1O_2$ , biết cạnh huyền  $O_1O_2$  và cạnh góc vuông bằng  $\sqrt{O_1O_2^2 - m^2}$ .

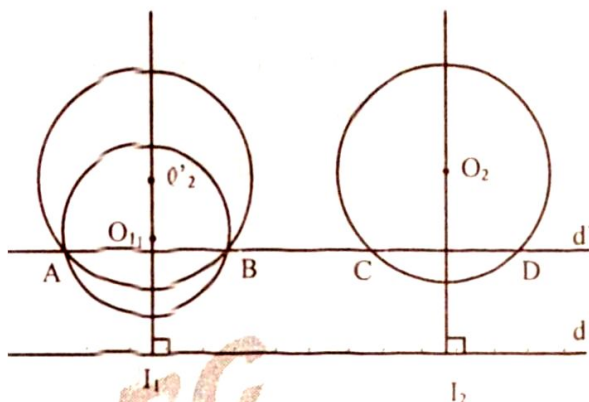
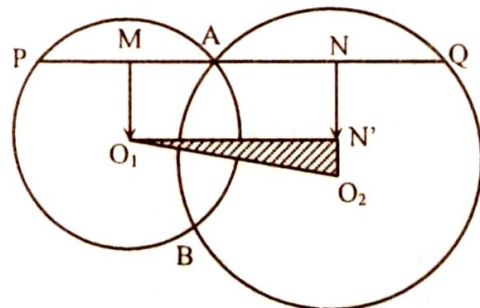
- Qua  $A$  kẻ dây cung vuông góc với  $O_2N'$ , đó chính là dây cung  $PQ$  cần dựng. Bài toán dựng được nếu như:  $O_1O_2 \geq m$ .

**Ví dụ 17:** Cho hai đường tròn  $(O_1)$ ,  $(O_2)$  và một đường thẳng  $d$ . Dựng một đường thẳng  $d' \parallel d$  sao cho  $d'$  cắt  $(O_1)$  và  $(O_2)$  theo hai dây cung bằng nhau.

### Giải

Giả sử đã dựng được đường thẳng  $d'$  song song với  $d$ , cắt  $(O_1)$  tại  $A, B$  và cắt  $(O_2)$  tại  $C, D$  thoả mãn:  $AB = CD$ .

Gọi  $I_1$  và  $I_2$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $O_1O_2$  trên  $d$ . Gọi  $(O'_2)$  là ảnh của  $(O_2)$  qua phép tịnh tiến  $T_{\overline{I_2I_1}}$ .





Do  $AB = CD \Rightarrow AC = BD = I_1I_2$  nên phép tịnh tiến đó biến  $C$  thành  $A$ ,  $D$  thành  $B$ , do đó  $(O'_2)$  cắt  $(O_1)$  tại  $A$  và  $B$ . Từ đó suy ra cách dựng.

Dựng  $(O'_2)$  là ảnh của  $(O_2)$  qua  $T_{I_2I_1}$ . Gọi  $A, B$  là các giao điểm của  $(O'_2)$

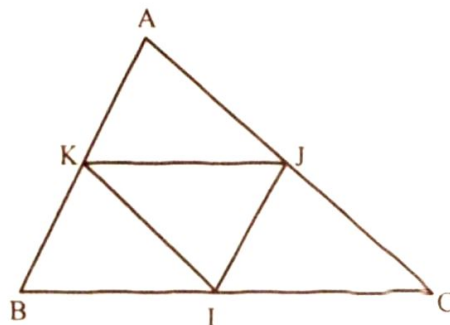
và  $(O_1)$  thì đường thẳng  $d'$  đi qua  $A, B$  sẽ là đường thẳng cần dựng.

**Ví dụ 18:** Cho ba điểm không thẳng hàng  $I, J, K$ . Hãy dựng tam giác  $ABC$  nhận  $I, J, K$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$ .

**Giải**

Giả sử tam giác  $ABC$  dựng được nhận  $I, J, K$  là trung điểm của  $BC, CA, AB$  thì  $KIJA$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{IJ}$ .

Suy ra cách dựng: Phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{IJ}$  biến  $K$  thành  $A$ , lấy đối xứng  $A$  qua  $K$  thì được điểm  $B$ , lấy đối xứng  $B$  qua  $I$  thì được điểm  $C$ .



Tam giác  $ABC$  là tam giác cần dựng. Bài toán có một nghiệm duy nhất.

**Ví dụ 19:** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm một điểm  $M$  trên cạnh  $AB$  và một điểm  $N$  trên cạnh  $AC$  sao cho  $MN$  song song với  $BC$  và  $AM = CN$ .

**Giải**

Giả sử đã dựng được hai điểm  $M, N$  thỏa mãn điều kiện đầu bài. Đường thẳng qua  $M$  và song song với  $AC$  cắt  $BC$  tại  $D$  thì tứ giác  $MNCD$  là hình bình hành.

Do đó  $CN = DM$  nên tam giác  $AMD$  cân tại  $M$ .

Ta có  $\widehat{MAD} = \widehat{MDA} = \widehat{DAC}$  nên  $AD$  là phân giác trong của góc  $A$  và  $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{CD}$  nên  $M$  là ảnh của  $N$  qua phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{CD}$ .

Từ đó suy ra cách dựng:

- Dựng đường phân giác trong của góc  $A$  cắt  $BC$  tại  $D$ .
- Dựng đường thẳng  $d$  là ảnh của đường thẳng  $AC$  qua phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{CD}$ ,  $d$  cắt  $AB$  tại  $M$ .
- Dựng  $N$  sao cho  $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{CD}$ , thì  $M, N$  là hai điểm cần dựng.

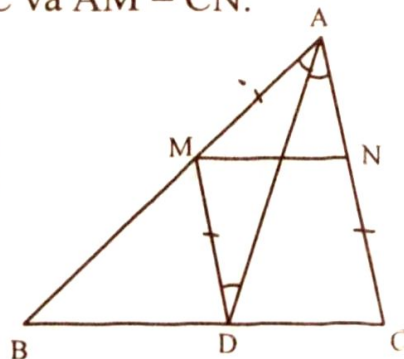
**Ví dụ 20:** Cho  $AB$  và  $CD$  là hai dây không cắt nhau của đường tròn  $(O)$ . Với một điểm  $M$  nằm trên đường tròn, gọi  $E$  và  $F$  theo thứ tự là giao điểm của  $MA$  và  $MB$  với  $CD$ . Xác định điểm  $M$  để  $\overrightarrow{EF} = \vec{a}$ ,  $\vec{a}$  cho trước.

**Giải**

Ta có  $\overrightarrow{EF} = \vec{a}$  xác định.

Giả sử đã dựng được điểm  $M$ . Gọi  $A' = T_{\vec{a}}(A)$  thì  $MA \parallel FA'$

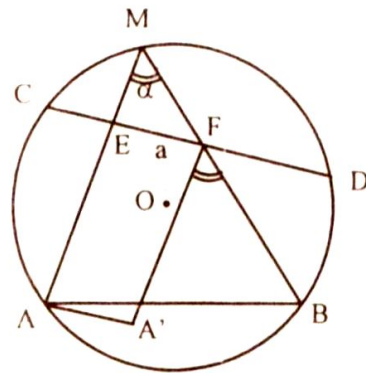
nên  $\widehat{A'FB} = \widehat{AMB} = \alpha$ : không đổi.



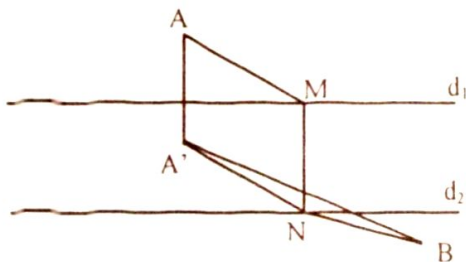


Do đó, F là giao điểm của CD với cung chứa góc  $\alpha$  nhìn bởi đoạn A'B. Từ đó suy ra cách dựng.

- Dựng ảnh của A qua  $T_a$  là  $A'$ .
- Dựng cung chứa góc  $\alpha$  trên dây  $A'B$ .
- Dựng giao điểm F của CD với cung đó, thì M là giao điểm của BF với (O).



**Ví dụ 21**: Cho hai đường thẳng song song  $d_1$  và  $d_2$  và hai điểm A, B ở hai phía của  $d_1$  ( $d_1, d_2$ ). Tìm  $M \in d_1, N \in d_2$  sao cho  $MN \perp d_1$  và  $AM + MN + NB$  là ngắn nhất.



## Giải

Giả sử  $M \in d_1$ ,  $N \in d_2$  sao cho  $MN \perp d_1$  ta có  $\overrightarrow{NM} = \vec{a}$ : xác định, phép tịnh tiến vector  $\vec{a}$  biến  $M$  thành  $N$ , biến  $A$  thành  $A'$  do đó  $AM = A'N$  nên:

$$AM + MN + NB = \left| \vec{a} \right| + A'N + NB \geq \left| \vec{a} \right| + A'B.$$

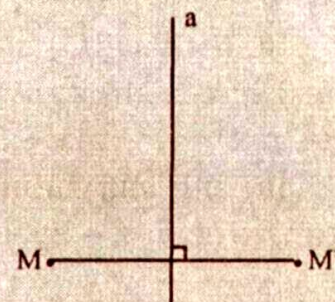
Dấu = xảy ra khi N là giao điểm của A'B với  $d_2$ , hạ  $NM \perp d_1$  thì M, N là 2 điểm cân bằng.

### DẠNG 3: PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

– Phép đối xứng qua đường thẳng  $a$  là phép biến hình biến mỗi điểm  $M$  thành điểm  $M'$  đối xứng với  $M$  qua  $a$ .

Phép đối xứng qua đường thẳng  $a$  thường được kí hiệu là  $\mathcal{D}_a$ . Phép đối xứng qua đường thẳng còn gọi là phép đối xứng trục.

Đường thẳng  $a$  gọi là trục của phép đối xứng, hay là trục đối xứng.



– Đường thẳng  $d$  gọi là trục đối xứng của hình  $(H)$  nếu phép đối xứng trục  $\mathbb{D}_d$  biến  $(H)$  thành chính nó, tức là  $\mathbb{D}_d((H)) = (H)$ .

### Chú yǐ:

- Phép đối xứng qua trục hoành biến  $M(x; y)$  thành  $M'(x; -y)$
- Phép đối xứng qua trục tung biến  $M(x; y)$  thành  $M'(-x; y)$
- Ứng dụng phép đối xứng trục để chứng minh hình học, giải bài toán dựng hình, xác định điểm, tìm tập hợp điểm (quỹ tích), ... khi có yếu tố liên quan đến trục trục là đường thẳng xác định, cố định.



**Ví dụ 1:** Qua phép đối xứng trục  $\Delta_a$ , đường thẳng  $d$  biến thành đường thẳng  $d'$ . Hãy trả lời các câu hỏi sau:

- Khi nào thì  $d$  song song với  $d'$ ?
- Khi nào thì  $d$  trùng với  $d'$ ?
- Khi nào thì  $d$  cắt  $d'$ ? Giao điểm của  $d$  và  $d'$  có tính chất gì?
- Khi nào  $d$  vuông góc với  $d'$ ?

**Giải**

Dựa vào định nghĩa và cách xác định ảnh ta có kết quả:

- Khi đường thẳng  $d \parallel$  đường thẳng  $a$ .
- Khi  $d$  vuông góc với  $a$  hoặc  $d$  trùng với  $a$ .
- Khi  $d$  cắt  $a$  nhưng không vuông góc với  $a$ . Khi đó giao điểm của  $d$  và  $d'$  nằm trên đường thẳng  $a$ .
- Khi góc giữa  $d$  và  $a$  bằng  $45^\circ$ .

**Ví dụ 2:** Trong mặt phẳng Oxy, qua phép đối xứng trục Oy, tìm ảnh của điểm, đường thẳng, đường tròn sau:

- Điểm  $A(2; -3)$
- Đường thẳng  $d: 3x - 2y + 1 = 0$
- Đường tròn (C):  $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 1 = 0$ .

**Giải**

Ảnh của điểm  $M(x; y)$  qua phép đối xứng có trục Oy là điểm  $M'$  có tọa độ  $(-x; y)$ .

- $A(2; -3)$  thành  $A'(-2; -3)$ .
- Ta có  $x' = -x, y' = y$  nên  $x = -x', y = y'$ .  
Thế vào  $d$  thành:  $-3x' - 2y' + 1 = 0$  hay  $3x' + 2y' - 1 = 0$   
Vậy  $d': 3x + 2y - 1 = 0$ .

- Tương tự, thế vào (C) thành:  
 $(-x')^2 + y'^2 - 4(-x') + 5y' + 1 = 0$  hay  $x'^2 + y'^2 + 4x' + 5y' + 1 = 0$   
Vậy (C'):  $x^2 + y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$ .

**Ví dụ 3:** Tìm ảnh của đường tròn (C):  $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$  qua phép đối xứng trục  $d: x - 2y + 4 = 0$ .

**Giải**

Đường tròn (C) có tâm  $I(1; 5)$  và bán kính  $R = \sqrt{1 + 25 - 1} = 5$

Ta tìm hình chiếu H của I lên  $d$  và tìm điểm  $I'$  đối xứng của I qua  $d$ .

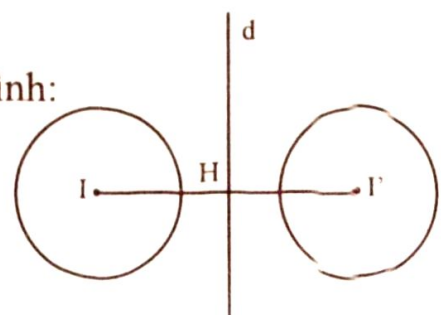
Đường thẳng qua I vuông góc với  $d$  có phương trình:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} \Leftrightarrow 2x + y - 7 = 0.$$

Hình chiếu H có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Điểm  $H(2; 3) \Rightarrow I'(3; 1)$





Vì  $R' = R$  nên  $(C')$ :  $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$ .

**Ví dụ 4:** Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng  $d$  có phương trình:  $x - 5y + 7 = 0$  và đường thẳng  $d'$  có phương trình  $5x - y - 13 = 0$ . Tìm phép đối xứng qua trục biến  $d$  thành  $d'$ .

**Giải**

Ta có  $d$  và  $d'$  cắt nhau. Do đó trục đối xứng  $\Delta$  của phép đối xứng biến  $d$  thành  $d'$  chính là các đường phân giác của góc tạo bởi  $d$  và  $d'$ .

$$M(x; y) \in \Delta \Leftrightarrow d(M; d) = d(M; d')$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x - 5y + 7|}{\sqrt{1 + 25}} = \frac{|5x - y - 13|}{\sqrt{25 + 1}}$$

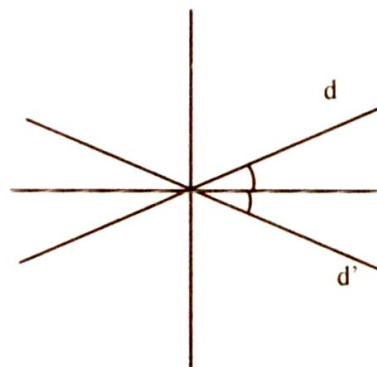
$$\Leftrightarrow x - 5y + 7 = \pm(5x - y - 13)$$

$$\Leftrightarrow x + y - 5 = 0 \text{ hay } x - y - 1 = 0$$

Vậy có hai phép đối xứng qua các trục:

$$\Delta_1 \text{ có phương trình } x + y - 5 = 0,$$

$$\Delta_2 \text{ có phương trình } x - y - 1 = 0.$$



**Ví dụ 5:** Qua phép đối xứng trục  $\Delta_d$  những điểm nào biến thành chính nó? Những đường thẳng nào biến thành chính nó? Những đường tròn nào biến thành chính nó?

**Giải**

Qua phép đối xứng trục  $\Delta_d$ , những điểm nằm trên  $d$  biến thành chính nó. Các đường thẳng vuông góc với  $d$ , và đường thẳng  $d$  đều biến thành chính nó. Các đường tròn có tâm nằm trên  $d$  đều biến thành chính nó.

**Ví dụ 6:** Tìm trục đối xứng của các hình sau đây: Tam giác cân, tam giác đều, hình thang cân, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông đường tròn, hình gồm hai đường tròn.

**Giải**

- Tam giác cân tại đỉnh A có một trục đối xứng là đường thẳng chứa đường cao AH.
- Tam giác đều có 3 trục đối xứng là ba đường thẳng chứa ba đường cao.
- Hình thang cân có một trục đối xứng là đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh đáy.
- Hình chữ nhật có hai trục đối xứng là hai đường thẳng đi qua trung điểm hai cặp cạnh đối;
- Hình thoi có hai trục đối xứng chứa các đường chéo;
- Hình vuông có bốn trục đối xứng (vừa như hình chữ nhật vừa như hình thoi).
- Đường tròn có vô số trục đối xứng là các đường thẳng đi qua tâm;
- Hình gồm hai đường tròn không bằng nhau và không đồng tâm có một trục đối xứng là đường nối tâm. Hình gồm hai đường tròn không bằng nhau và đồng tâm có vô số trục đối xứng là các đường thẳng đi qua tâm chung.



Hình gồm hai đường tròn bằng nhau không đồng tâm có hai trục đối xứng là đường nối tâm và đường trung trực của đoạn thẳng nối hai tâm.

**Ví dụ 7:** Cho tam giác ABC với trực tâm H

- Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác HAB, HBC, HCA có bán kính bằng nhau.
- Gọi  $O_1, O_2, O_3$  là tâm các đường tròn nói trên. Chứng minh rằng đường tròn đi qua ba điểm  $O_1, O_2, O_3$  bằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

**Giải**

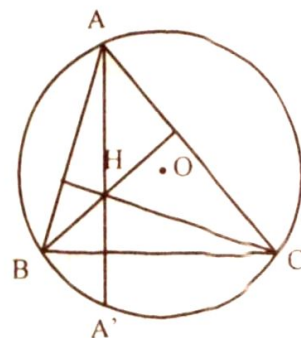
- Gọi  $A'$  là giao điểm của AH và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì  $A'$  và H đối xứng với nhau qua đường thẳng BC.

Vì vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC là ảnh của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $A'BC$  cũng là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, qua phép đối xứng  $D_{BC}$ .

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC có bán kính bằng bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Chứng minh tương tự, đường tròn ngoại tiếp tam giác HAC và HAB cũng có bán kính bằng R.

- Nếu gọi O là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì  $O_1, O_2, O_3$  lần lượt là các điểm đối xứng với O qua các đường thẳng AB, BC và CA. Và hai tam giác ABC và  $O_1O_2O_3$  bằng nhau. Từ đó suy ra đường tròn đi qua ba điểm  $O_1, O_2, O_3$  bằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



**Ví dụ 8:** Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi  $d_1, d_2, d_3$  lần lượt là các đường trung trực của các đoạn thẳng AB, BC và CA. Với một điểm M bất kì, lấy  $M_1$  đối xứng với M qua  $d_1$ ,  $M_2$  đối xứng với  $M_1$  qua  $d_2$  và  $M_3$  đối xứng với  $M_2$  qua  $d_3$ . Chứng minh rằng trung trực của đoạn thẳng  $MM_3$  là một đường thẳng cố định.

**Giải**

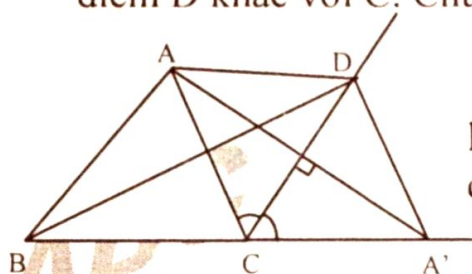
Vì phép đối xứng qua đường thẳng không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm nên ta có  $AM = BM_1 = CM_2 = AM_3$  và  $OM = OM_1 = OM_2 = OM_3$ . Do đó hai điểm A và O cách đều hai điểm M và  $M_3$ . Vậy trung trực của đoạn thẳng  $MM_3$  chính là đường thẳng cố định OA.

**Ví dụ 9:** Cho tam giác ABC. Trên đường phân giác ngoài của góc C lấy một điểm D khác với C. Chứng minh rằng:  $DA + DB > CA + CB$ .

**Giải**

Gọi  $A'$  là điểm đối xứng với A qua CD. Do CD là phân giác ngoài của góc C, nên  $A'$  thuộc tia đối của tia CB và  $A'C = AC$

Ta có:  $DA + DB = DA' + DB > BA'$  (do  $D \notin BA'$ )





Mặt khác:  $BA' = CB + CA' = CB + CA$

Do đó  $DA + DB > CA + CB$ .

**Ví dụ 10:** Cho tứ giác lồi ABCD có  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$ .

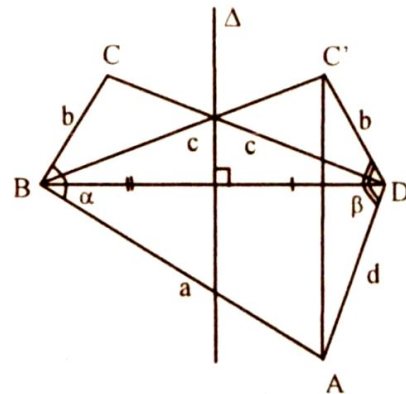
Chứng minh tứ giác có diện tích  $S \leq \frac{ac + bd}{2}$ .

**Giải**

Ta dựng đường trung trực  $\Delta$  của đường chéo BD và gọi  $C'$  là ảnh của C trong phép đối xứng qua  $\Delta$ , khi đó  $\triangle BC'D = \triangle BCD$ ,  $DC' = BC = b$ ,  $BC' = DC = c$ .

Tứ giác lồi  $ABC'D$  có diện tích bằng S và các cạnh liên tiếp  $AB = a$ ,  $BC' = c$ ,  $C'D = b$ ,  $DA = d$ .

$$\begin{aligned} S &= S_{ABC'D} = S_{ABC'} + S_{ADC'} \\ &= \frac{1}{2} \cdot ac \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot bd \cdot \sin \beta \\ &\leq \frac{1}{2} ac + \frac{1}{2} bd = \frac{ac + bd}{2} \end{aligned}$$



**Ví dụ 11:** Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB và AC tương ứng tại các điểm  $C'$  và  $B'$ . Chứng minh rằng nếu  $AC > AB$  thì  $CC' > BB'$ .

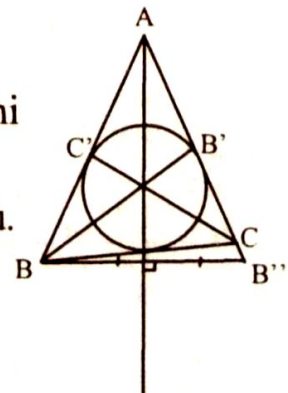
**Giải**

Gọi  $B''$  là điểm đối xứng của B qua phân giác góc A. Khi đó  $B''$  nằm trên cạnh AC và  $AB = AB''$ .

Tam giác  $ABB''$  cân tại A, do đó  $\widehat{AB''B}$  nhọn và  $\widehat{BB''C}$  tù.

Mặt khác, tia  $B''C'$  nằm ngoài góc  $\widehat{BB''C}$  nên

$\widehat{C'B''C}$  là góc tù, đối diện với góc đó là cạnh  $CC'$ . Vì vậy  $CC' > B''C'$  hay  $CC' > BB'$ .



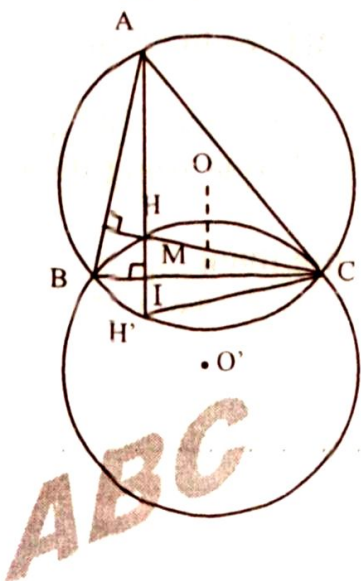
**Ví dụ 12:** Cho hai điểm B, C cố định nằm trên đường tròn (O; R) và điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng trục để chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên đường tròn cố định.

**Giải**

Gọi I, H' theo thứ tự là giao điểm của tia AH với BC và đường tròn (O).

Ta có:  $\widehat{BAH} = \widehat{BCH}$ ,  $\widehat{BAH} = \widehat{BCH'}$  nên tam giác  $CHH'$  cân tại C, suy ra H và H' đối xứng với nhau qua đường thẳng BC. Khi A chạy trên đường tròn (O) thì H' cũng chạy trên đường tròn (O).

Vậy H chạy trên đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép đối xứng qua đường thẳng BC.





**Ví dụ 13:** Cho một đường thẳng  $d$  và một vector  $\vec{v}$  cố định. Với mỗi điểm  $M$  bất kì, phép đối xứng trục  $\mathcal{D}_d$  biến  $M$  thành  $M'$ , và phép tịnh tiến  $T_{\vec{v}}$  biến  $M'$  thành  $M''$ . Tìm quỹ tích trung điểm của đoạn thẳng  $MM''$ .

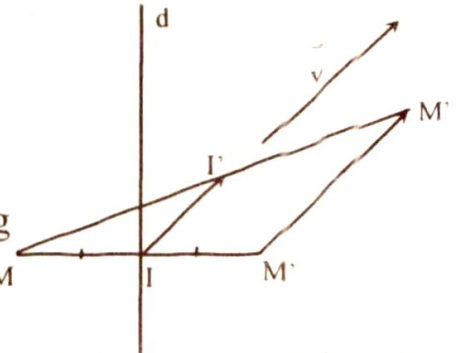
**Giải**

Gọi  $I$  là trung điểm  $MM'$ ,  $I'$  là trung điểm  $MM''$  thì

$$\vec{II'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{M'M''} = \frac{\vec{v}}{2}.$$

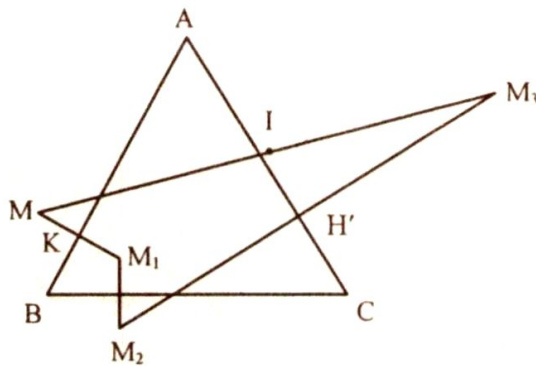
Vậy phép tịnh tiến theo vector  $\frac{\vec{v}}{2}$  biến  $I$  thành  $I'$ .

Vì  $I$  nằm trên  $d$  nên quỹ tích  $I'$  là đường thẳng  $d'$ , ảnh của  $d$  qua phép tịnh tiến theo vector  $\frac{\vec{v}}{2}$ .



**Ví dụ 14:** Cho tam giác đều  $ABC$ . Với một điểm  $M$  tùy ý gọi  $M_1$  là điểm đối xứng với  $M$  qua đường thẳng  $AB$ ,  $M_2$  là điểm đối xứng với  $M_1$  qua đường thẳng  $BC$  và  $M_3$  là điểm đối xứng với  $M_2$  qua đường thẳng  $CA$ . Tìm quỹ tích trung điểm  $I$  của  $MM_3$ .

**Giải**



Gọi  $M'$  là điểm đối xứng của  $M$  qua  $BC$ ,  $K$  là trung điểm của  $MM_1$  ( $K \in AB$ ) và  $K'$  là trung điểm của  $M'M_2$ . Khi đó phép đối xứng qua đường thẳng  $BC$  sẽ biến  $M$  thành  $M'$ ,  $M_1$  thành  $M_2$  nên cũng biến  $K$  thành  $K'$  tức là biến  $BK$  thành  $BK'$ .

Suy ra góc hợp bởi  $BK'$  và  $BC$  cũng bằng  $60^\circ$  hay  $BK' \parallel AC$ . Vì  $M'M_2 \perp BK'$ ,  $M_2M_3 \perp AC$ , suy ra ba điểm  $M'$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  thẳng hàng. Nếu ta gọi  $H'$  là trung điểm  $M_2M_3$  ( $H' \in AC$ ) thì  $\overrightarrow{M'M_3} = 2\overrightarrow{K'H'} = 2\overrightarrow{BH}$  với  $BH$  là đường cao của tam giác  $ABC$ .

Nếu gọi  $P$  là trung điểm  $MM'$  ( $P \in BC$ ) và  $I$  là trung điểm  $MM_3$  thì  $\overrightarrow{PI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{M'M_3} = \overrightarrow{BH}$ . Vậy phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{BH}$  sẽ biến điểm  $P$  thành  $I$ , vì  $P \in BC$  nên quỹ tích  $I$  chính là ảnh của đường thẳng  $BC$  qua phép tịnh tiến nói trên. Quỹ tích này là đường thẳng đi qua trung điểm của hai cạnh  $AB$  và  $AC$ .

**Ví dụ 15:** Cho hai đường tròn  $(O; R)$ ,  $(O'; R')$  và một đường thẳng  $d$ .

- Tìm hai điểm  $M$ ,  $N$  lần lượt nằm trên hai đường tròn đó sao cho  $d$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $MN$ .
- Xác định điểm  $I$  trên  $d$  sao cho tiếp tuyến  $IT$  của  $(O; R)$  và tiếp tuyến  $IT'$  của  $(O'; R')$  hợp thành các góc mà  $d$  là một trong các đường phân giác của các góc đó.

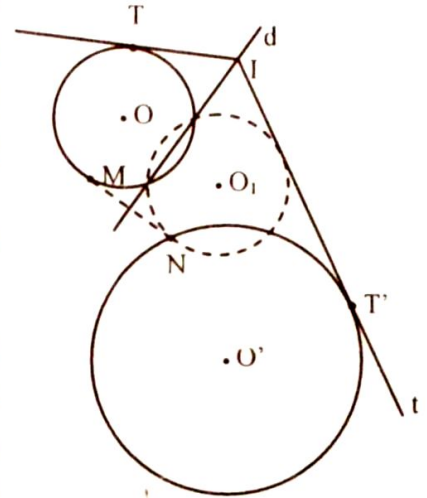


### Giải

- a) Gọi  $(O_1; R)$  là ảnh của đường tròn  $(O; R)$  qua phép đối xứng trục  $D_d$ . Giao điểm (nếu có) của hai đường tròn  $(O_1; R)$  và  $(O'; R)$  chính là điểm  $N$  cần tìm, điểm  $M$  là điểm đối xứng với  $N$  qua  $d$ .
- b) Gọi  $I$  là điểm cần tìm thì  $IT'$  là tiếp tuyến chung của hai đường tròn  $(O_1; R)$  và  $(O'; R')$ .

Suy ra cách dựng: Vẽ tiếp tuyến chung  $t$  của hai đường tròn  $(O_1; R)$  và  $(O'; R')$ . Giao điểm của  $t$  và  $d$  chính là điểm  $I$  cần tìm. Khi đó tiếp tuyến  $IT'$  chính là  $t$  còn đường thẳng đối xứng với  $IT'$  qua  $d$  là tiếp tuyến  $IT$  của  $(O; R)$ .

Số nghiệm phụ thuộc vào số tiếp tuyến chung và số điểm chung của  $t$  và  $d$ .



**Ví dụ 16:** Cho một tam giác đều  $ABC$  và ba đường thẳng song song  $a, b, c$  lần lượt đi qua ba đỉnh  $A, B, C$ . Cho một điểm  $P$  nằm trên  $a$ . Hãy dựng tam giác đều có một đỉnh là  $P$  và hai đỉnh còn lại lần lượt nằm trên hai đường thẳng  $b$  và  $c$ . Bài toán có bao nhiêu nghiệm hình?

### Giải

Dùng phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{AP}$ , thì tam giác đều  $ABC$  biến thành tam giác đều  $PQR$  ( $A$  biến thành  $P$ ,  $B$  biến thành  $Q$ ,  $C$  biến thành  $R$ ) và ba điểm  $P, Q, R$  lần lượt nằm trên  $a, b, c$ .

Gọi  $p$  là đường thẳng đi qua  $P$  và vuông góc với  $a$ .

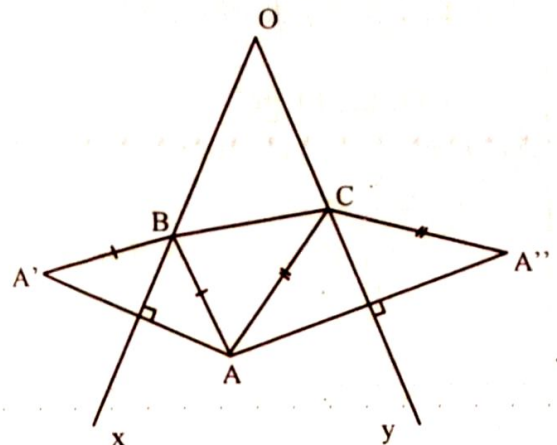
Phép đối xứng trục  $D_p$  biến tam giác  $PQR$  thành tam giác  $PQ'R'$  có ba đỉnh lần lượt nằm trên  $a, b, c$ . Bài toán có hai nghiệm hình  $PQR$  và  $PQ'R'$ .

**Ví dụ 17:** Cho góc nhọn  $xOy$  và một điểm  $A$  nằm trong góc đó. Xác định điểm  $B$  trên  $Ox$  và điểm  $C$  trên  $Oy$  sao cho tam giác  $ABC$  có chu vi nhỏ nhất.

### Giải

Xét tam giác  $ABC$  có  $B$  và  $C$  lần lượt nằm trên hai tia  $Ox$  và  $Oy$ . Gọi  $A'$  và  $A''$  là các điểm đối xứng với điểm  $A$  lần lượt qua các đường thẳng  $Ox$  và  $Oy$ . Chu vi của tam giác  $ABC$  là:

$$\begin{aligned} & AB + BC + CA \\ &= A'B + BC + CA'' \geq A'A''. \end{aligned}$$

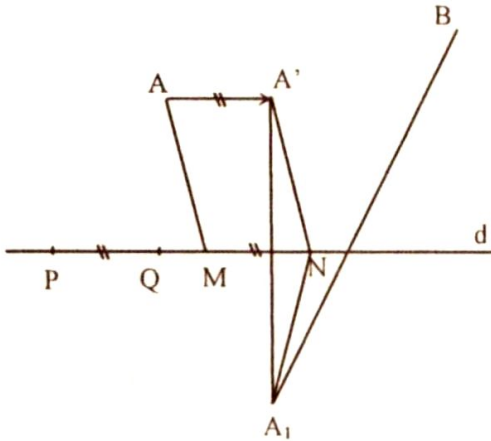




Dấu " $=$ " xảy ra khi bốn điểm  $A', B, C, A''$  thẳng hàng. Vậy chu vi tam giác  $ABC$  bé nhất khi lấy  $B$  và  $C$  lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng  $A'A''$  với hai tia của góc nhọn  $xOy$ .

Vì góc  $xOy$  nhọn tồn tại các giao điểm  $B$  và  $C$ .

**Ví dụ 18:** Cho đường thẳng  $d$  đi qua hai điểm phân biệt  $P, Q$  và hai điểm  $A, B$  nằm về một phía đối với  $d$ . Hãy xác định trên  $d$  hai điểm  $M, N$  sao cho  $\overline{MN} = \overline{PQ}$  và  $AM + BN$  bé nhất.



### Giải

Giả sử dựng được hai điểm  $M, N$  nằm trên  $d$  sao cho  $\overline{MN} = \overline{PQ}$ . Lấy điểm  $A'$  sao cho  $\overline{AA'} = \overline{PQ}$  thì điểm  $A'$  hoàn toàn xác định và  $AMNA'$  là hình bình hành nên  $AM = A'N$ .

Do đó  $AM + BN = A'N + BN$ .

Lấy  $A_1$  đối xứng  $A'$  qua  $d$  thì:

$A'N + BN = A_1N + BN \geq A_1B$ : Không đổi

Vậy điểm  $N$  cần tìm là giao điểm của  $A_1B$  và  $d$ , và điểm  $M$  xác định bởi  $\overline{NM} = \overline{QP}$ .

## DẠNG 4: PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

– Phép đối xứng qua điểm  $O$  là một phép biến hình biến mỗi điểm  $M$  thành  $M'$  đối xứng với  $M$  qua  $O$ , có nghĩa là:

$$\overline{OM} + \overline{OM'} = \vec{0}$$

Phép đối xứng qua điểm  $O$  thường được kí hiệu là  $\mathcal{D}_O$ . Phép đối xứng qua một điểm còn gọi là phép đối xứng tâm.

Điểm  $O$  gọi là tâm của phép đối xứng, hay là tâm đối xứng.

– Trong hệ toạ độ Oxy cho điểm  $I(a; b)$ . Nếu phép đối xứng tâm  $\mathcal{D}_I$  biến điểm  $M(x; y)$  thành điểm  $M'(x'; y')$  thì: 
$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$

– Điểm  $O$  gọi là tâm đối xứng của một hình  $(H)$  nếu phép đối xứng tâm  $\mathcal{D}_O$  biến hình  $(H)$  thành chính nó, tức là  $\mathcal{D}_O((H)) = (H)$ .

Chú ý: – Phép đối xứng qua gốc  $O$  biến  $M(x; y)$  thành  $M'(-x; -y)$

– Ứng dụng phép đối xứng tâm để giải bài toán dựng hình tương giao, tập hợp điểm, ... khi có yếu tố liên quan đến trung điểm là điểm xác định, cố định.



**Ví dụ 1:** Qua phép đối xứng tâm  $D_O$ , những điểm nào biến thành chính nó. Những đường thẳng nào biến thành chính nó? Những đường tròn nào biến thành chính nó?

**Giải**

Điểm  $O$  biến thành chính nó. Mọi đường thẳng đi qua  $O$  đều biến thành chính nó. Mọi đường tròn có tâm  $O$  đều biến thành chính nó.

**Ví dụ 2:** Giả sử phép đối xứng tâm  $D_O$  biến đường thẳng  $d$  thành đường thẳng  $d'$ . Chứng minh:

a) Nếu  $d$  không đi qua tâm đối xứng  $O$  thì  $d'$  song song với  $d$ ,  $O$  cách đều  $d$  và  $d'$ .

b) Hai đường thẳng  $d$  và  $d'$  trùng nhau khi và chỉ khi  $d$  đi qua  $O$ .

**Giải**

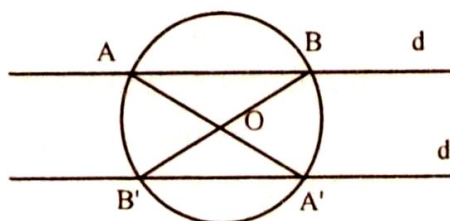
a) Hạ  $OH \perp d$ , vì  $d$  không đi qua  $O$  nên  $H$  không trùng với  $O$ . Phép đối xứng tâm  $D_O$  biến  $H$  thành  $H'$  thì  $O$  là trung điểm của  $HH'$  và biến đường thẳng  $d$  thành đường thẳng  $d'$  vuông góc với  $OH'$  tại  $H'$ . Suy ra  $d$  và  $d'$  song song, cách đều điểm  $O$ .

b) Nếu  $d$  không đi qua  $O$  thì theo câu a),  $d' \parallel d$  nên  $d'$  không trùng với  $d$ . Nếu  $d$  đi qua  $O$  thì mọi điểm  $M \in d$  biến thành điểm  $M' \in d$ . Vậy  $d'$  trùng với  $d$ .

**Ví dụ 3:** Cho phép đối xứng tâm  $D_O$  và đường thẳng  $d$  không đi qua  $O$ . Hãy nêu cách dựng ảnh  $d'$  của đường thẳng  $d$  qua  $D_O$ . Tìm cách dựng  $d'$  mà chỉ sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần.

**Giải**

Dựng đường tròn  $(O; R)$  sao cho nó cắt  $d$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$ . Dựng các đường thẳng  $AO$  và  $BO$ , chúng cắt đường tròn đó lần lượt tại  $A'$  và  $B'$ .



Dựng đường thẳng  $d'$  đi qua  $A'$  và  $B'$ . Phép dựng trên đây sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần.

**Ví dụ 4:** Tìm ảnh qua phép đối xứng tâm  $I(1; 2)$  của:

a) Điểm  $A(3; -4)$

b) Đường tròn  $(C): x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$

**Giải**

$D_I: M(x; y) \mapsto M'(x'; y')$  với  $x' = 2 - x, y' = 4 - y$ .

a)  $A(3; -4)$  biến thành  $A'(-1; 8)$

b) Đường tròn  $(C)$  tâm  $J(-1; 3)$  biến thành  $J'(3; 1)$  và  $R' = R = 2$  nên  $(C')$ :  
 $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$ .

**Ví dụ 5:** Cho đường thẳng  $\Delta: ax + by + c = 0$  và điểm  $I(x_0; y_0)$ . Phép đối xứng tâm  $D_I$  biến đường thẳng  $\Delta$  thành đường thẳng  $\Delta'$ . Viết phương trình của  $\Delta'$ .



### Giải

Cho  $M(x; y)$  và  $M'(x'; y')$  là ảnh của  $M$  qua phép đối xứng tâm với tâm  $I(x_0; y_0)$  thì  $x + x' = 2x_0$ ;  $y + y' = 2y_0$  nên  $x = 2x_0 - x'$ ;  $y = 2y_0 - y'$ . Thế vào phương trình  $\Delta$  thành:

$$a(2x_0 - x') + b(2y_0 - y') + c = 0$$

$$\text{hay: } -(ax' + by' + c) + 2(ax_0 + by_0 + c) = 0$$

$$\text{Vậy } (\Delta'): ax + by + c - 2(ax_0 + by_0 + c) = 0.$$

**Ví dụ 6:** Cho đường thẳng  $d: x - 2y + 2 = 0$  và  $d': x - 2y - 8 = 0$ . Tìm phép đối xứng tâm biến  $d$  thành  $d'$  và biến trục  $Oy$  thành chính nó.

### Giải

Giao của  $d, d'$  với trục  $Oy$  là  $A(0; 1), A'(0; -4)$ .

Theo giả thiết  $d$  thành  $d'$  và biến trục  $Oy$  thành chính nó thì  $A$  biến thành  $A'$  nên tâm đối xứng  $I$  là trung điểm của  $AA'$  là  $I(0; -\frac{3}{2})$ .

**Ví dụ 7:** Tìm tâm đối xứng của các hình sau đây: tam giác đều, hình bình hành, lục giác đều, đường tròn, hình gồm hai đường tròn bằng nhau.

### Giải

- Tam giác đều không có tâm đối xứng
- Hình bình hành có một tâm đối xứng là giao điểm hai đường chéo.
- Lục giác đều có một tâm đối xứng là tâm của chúng.
- Đường tròn có một tâm đối xứng là tâm của chúng.
- Hình gồm hai đường tròn bằng nhau có một tâm đối xứng là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tâm.

**Ví dụ 8:** Chứng minh rằng nếu một tứ giác có tâm đối xứng thì đó là hình bình hành.

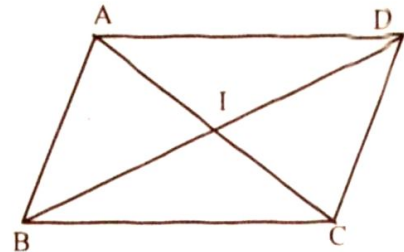
### Giải

Giả sử tứ giác  $ABCD$  có tâm đối xứng là  $I$ . Đỉnh  $A$  chỉ có thể biến thành  $A, B, C$  hay  $D$ .

- Nếu đỉnh  $A$  biến thành chính nó thì  $A$  là tâm đối xứng của tứ giác: vô lí.
- Nếu  $A$  biến thành  $B$  hoặc  $D$  thì tâm đối xứng thuộc các cạnh  $AB$  hoặc  $AD$  của tứ giác: vô lí.

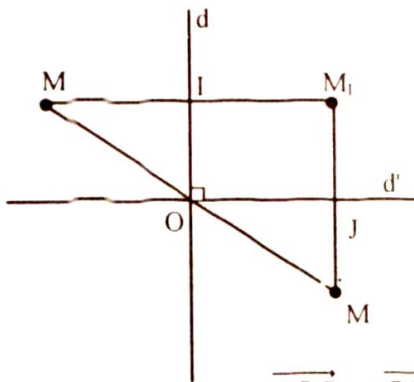
Vậy  $A$  chỉ có thể biến thành đỉnh  $C$ .

Lí luận tương tự đỉnh  $B$  chỉ có thể biến thành đỉnh  $D$ . Khi đó tâm đối xứng  $I$  là trung điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  nên tứ giác  $ABCD$  phải là hình bình hành.





**Ví dụ 9** Chứng minh rằng nếu một hình nào đó có hai trục đối xứng vuông góc với nhau thì hình đó có tâm đối xứng.



**Giải**

Giả sử hình (H) có hai trục đối xứng  $d$  và  $d'$  vuông góc với nhau tại  $O$ . Lấy  $M$  là điểm bất kỳ thuộc hình (H),  $M_1$  là điểm đối xứng với  $M$  qua  $d$ ,  $M'$  là điểm đối xứng với  $M_1$  qua  $d'$ . Vì  $d$  và  $d'$  đều là trục đối xứng của hình (H) nên  $M_1$  và  $M'$  đều thuộc (H).

Gọi  $I, J$  là trung điểm của  $MM_1, M_1M'$  ta có:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{M'J} + \overrightarrow{JO} = \overrightarrow{M'O} \Rightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

**Ví dụ 10:** Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD và DA. Hạ  $MM', NN', PP', QQ'$  lần lượt vuông góc với CD, DA, AB, BC.

- Gọi  $I$  là giao điểm của  $MP$  và  $NQ$ . Phép đối xứng tâm  $I$  biến các đường thẳng  $MM', NN', PP', QQ'$  thành những đường thẳng nào?
- Chứng tỏ rằng bốn đường thẳng  $MM', NN', PP', QQ'$  đồng quy tại một điểm. Nhận xét gì về vị trí điểm đồng quy và hai điểm  $I, O$ ?

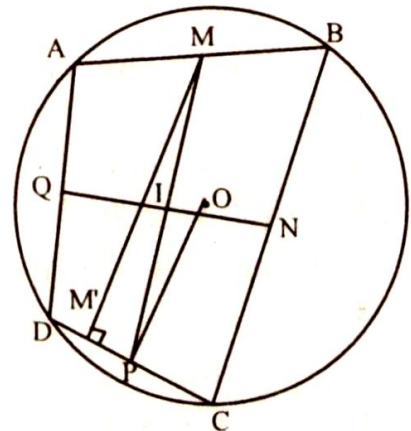
**Giải**

- Vì MNPQ là hình bình hành nên  $I$  là trung điểm của  $MP$  và  $NQ$ .

Phép đối xứng tâm  $I$  biến điểm  $M$  thành điểm  $P$ , biến đường thẳng  $MM'$  thành đường thẳng đi qua  $P$  và song song với  $MM'$ , tức là vuông góc với DC.

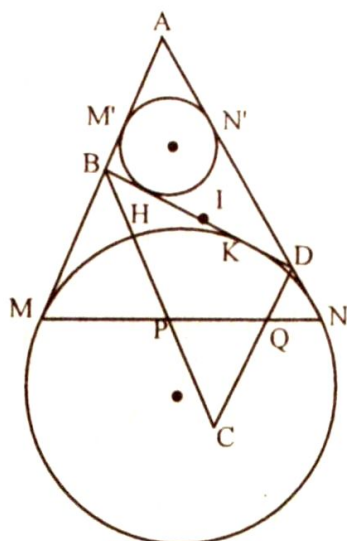
Do đó, đường thẳng  $MM'$  được biến thành đường thẳng  $PO$ . Hoàn toàn tương tự; đường thẳng  $NN'$  biến thành đường thẳng  $QO$ , đường thẳng  $PP'$  biến thành đường thẳng  $MO$ , đường thẳng  $QQ'$  biến thành đường thẳng  $NO$ .

- Vì bốn đường thẳng  $MO, NO, PO, QO$  đồng quy tại  $O$  nên bốn đường thẳng  $MM', NN', PP', QQ'$  đồng quy tại điểm  $O'$  đối xứng với tâm  $O$  qua điểm  $I$ .



**Ví dụ 11:** Cho hình bình hành ABCD và đường tròn (C) bàng tiếp của tam giác ABD, tiếp xúc với phần kéo dài của AB và AD tương ứng tại các điểm M và N. Đoạn thẳng MN cắt BC và DC tương ứng tại các điểm P và Q. Chứng minh rằng đường tròn nội tiếp tam giác BCD tiếp xúc với các cạnh BC và DC tại P và Q.





### Giải

Gọi K là tiếp điểm của (C) với BD; (V) là đường tròn nội tiếp tam giác ABD, tiếp xúc với AB tại M', với AD tại N' và BD tại H; gọi I là trung điểm của BD.

Từ  $MM' = NN'$

và  $MM' = BH + BK$ ,

$NN' = DK + DH$  suy ra  $BH = DK$ .

Ta có phép đối xứng  $\mathcal{D}_I: B \mapsto D$ ,

$H \mapsto K$ .

Tam giác AMN cân tại A và vì  $DQ \parallel AM$  nên tam giác DQN cân tại D suy ra  $DQ = DN = DK = BH = BM'$ . Do đó, Q là ảnh của M' trong phép  $\mathcal{D}_I$ . Tương tự, P là ảnh của N' trong phép  $\mathcal{D}_I$ , phép  $\mathcal{D}_I: (V) \mapsto (V')$  đi qua 3 điểm K, Q, P. Vì M', N', H là các điểm chung duy nhất của (V) với AB, AD và BD, do đó K, Q, P cũng là điểm chung duy nhất của (V') với BD, CD, CB suy ra đpcm.

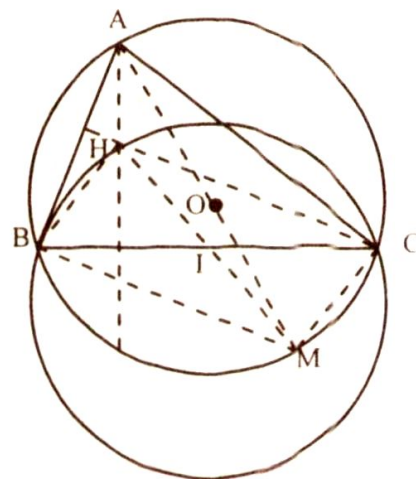
**Ví dụ 12:** Cho hai điểm B, C cố định trên đường tròn (O; R) và một điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng tâm để chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.

### Giải

Vẽ đường kính AM của đường tròn thì có  $BH \parallel MC$  và  $CH \parallel MB$  nên BHCM là hình bình hành. Nếu gọi I là trung điểm của BC thì I cố định và cũng là trung điểm của MH.

Vậy phép đối xứng qua điểm I biến M thành H.

Khi A chạy trên đường tròn (O; R) thì M chạy trên đường tròn (O; R). Do đó, H nằm trên đường tròn là ảnh của đường tròn (O; R) qua phép đối xứng tâm với tâm I.



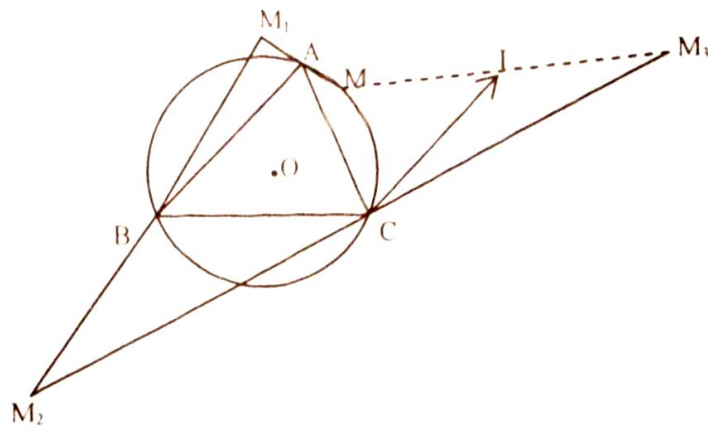
**Ví dụ 13:** Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và một điểm M thay đổi trên (O). Gọi  $M_1$  là điểm đối xứng với M qua A,  $M_2$  là điểm đối xứng với  $M_1$  qua B,  $M_3$  là điểm đối xứng với  $M_2$  qua C. Chứng minh phép biến hình F biến điểm M thành  $M_3$  là một phép đối xứng tâm. Suy ra quỹ tích điểm  $M_3$ .

### Giải

Gọi I là trung điểm của  $MM_3$ , ta có:

$$\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CM_3}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{M_2C}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_2M} = \overrightarrow{BA}$$





Như vậy điểm I cố định, do đó phép biến hình F biến điểm M thành  $M_3$  là phép đối xứng qua điểm I.

Vì M thay đổi trên (O) nên quỹ tích điểm  $M_3$  là đường tròn  $(O')$ , ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng tâm với tâm I.

**Ví dụ 14:** Cho đường tròn (O) và dây cung AB cố định, M là một điểm di động trên (O), M không trùng A, B. Hai đường tròn  $(O_1)$ ,  $(O_2)$  qua M theo thứ tự tiếp xúc với AB tại A và B. Tìm quỹ tích các điểm N là giao điểm thứ hai của  $(O_1)$  và  $(O_2)$ .

**Giải**

Gọi I là giao điểm của MN và AB, ta có:

$$IA^2 = IM \cdot IN = IB^2 \Rightarrow IA = IB$$

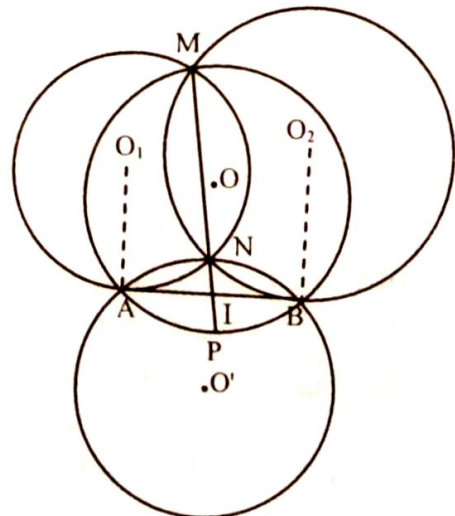
$\Rightarrow$  I là trung điểm của AB cố định.

Gọi P là giao điểm thứ hai của MN với (O) ta có:

$$IA^2 = IA \cdot IB = IM \cdot IP$$

$\Rightarrow IN = IP$  nên I là trung điểm của PN, do đó phép đối xứng tâm I biến P thành N.

Vì quỹ tích điểm P là đường tròn (O) nên quỹ tích N là đường tròn  $(O')$  là ảnh của (O) qua phép đối xứng tâm I, bỏ đi hai điểm A và B.



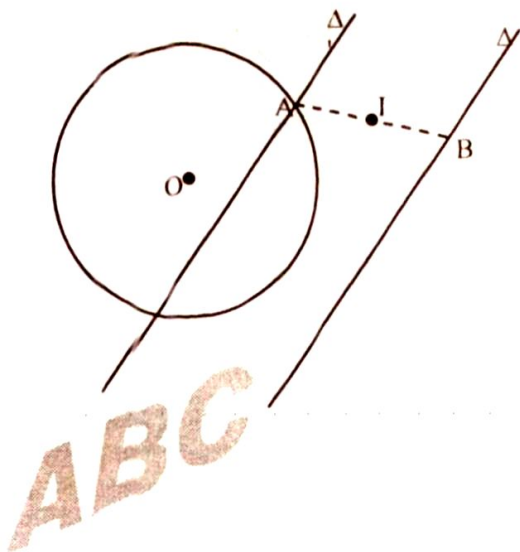
**Ví dụ 15:** Cho đường tròn  $(O; R)$ , đường thẳng  $\Delta$  và điểm I. Tìm điểm A trên  $(O; R)$  và điểm B trên  $\Delta$  sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

**Giải**

Giả sử có điểm A trên đường tròn  $(O; R)$  và điểm B trên  $\Delta$  sao cho I là trung điểm AB.

Phép đối xứng tâm  $\mathcal{D}_I$  biến B thành A nên biến đường thẳng  $\Delta$  thành đường thẳng  $\Delta'$  đi qua A.

Mặt khác A lại nằm trên  $(O; R)$  nên A phải là giao điểm của  $\Delta'$  và  $(O; R)$ . Suy ra cách dựng:





Dựng đường thẳng  $\Delta'$  là ảnh của  $\Delta$  qua phép đối xứng tâm  $D_1$ . Lấy  $A$  là giao điểm của  $\Delta'$  và  $(O; R)$ , còn  $B$  là giao điểm của đường thẳng  $AI$  và đường thẳng  $\Delta$ .

Số nghiệm hình là số giao điểm của  $\Delta'$  và  $(O; R)$ .

**Ví dụ 16:** Cho 5 điểm  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ . Dựng một hình ngũ giác  $ABCDE$  sao cho trung điểm các cạnh  $AB, BC, CD, DE$  và  $EA$  lần lượt là  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ .

### Giải

Giả sử đã dựng được ngũ giác  $ABCDE$  theo yêu cầu. Lấy một điểm  $A'$  tùy ý, và gọi  $B'$  là điểm đối xứng của  $A'$  qua  $P_1$ ,  $C'$  là điểm đối xứng của  $B'$  qua  $P_2$ ,  $D'$  là điểm đối xứng của  $C'$  qua  $P_3$ ,  $E'$  là điểm đối xứng của  $D'$  qua  $P_4$  và  $A''$  là điểm đối xứng của  $E'$  qua  $P_5$ .

Khi đó  $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{P_1A'} - \overrightarrow{P_1A} = -\overrightarrow{P_1B'} + \overrightarrow{P_1B} = -\overrightarrow{BB'}$

Tương tự  $\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{CC'} = -\overrightarrow{DD'}, \overrightarrow{DD'} = -\overrightarrow{EE'}, \overrightarrow{EE'} = -\overrightarrow{AA'}$

Do đó  $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{AA''}$  nên  $A$  là trung điểm của  $A'A''$ .

Từ đó suy ra cách dựng: Lấy một điểm  $A'$  bất kì, rồi dựng các điểm  $B', C', D', E', A''$  như trên. Cuối cùng dựng trung điểm  $A$  của đoạn thẳng  $A'A''$ , thì  $A$  là một đỉnh của ngũ giác cần tìm. Các đỉnh còn lại dựng dễ dàng.

Bài toán có một nghiệm hình duy nhất. Thật vậy nếu có hai ngũ giác  $ABCDE$  và  $A'B'C'D'E'$  cùng thỏa mãn điều kiện của bài toán thì lập luận như trên ta có  $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{AA'}$  nên  $\overrightarrow{AA'} = \vec{0}$  tức là  $A$  trùng với  $A'$ , và do đó  $B, C, D, E$  lần lượt trùng với  $B', C', D', E'$ .

**Ví dụ 17:** Cho đỉnh  $O$  nằm trong tam giác  $ABC$ . Gọi  $A', B', C'$  là ảnh của  $A, B, C$  qua phép đối xứng tâm  $O$ . Biết rằng  $A'$  ở trong tam giác  $ABC$ , tìm vị trí của  $O$  để phần chung  $T$  của 2 tam giác  $ABC, A'B'C'$  có diện tích lớn nhất?

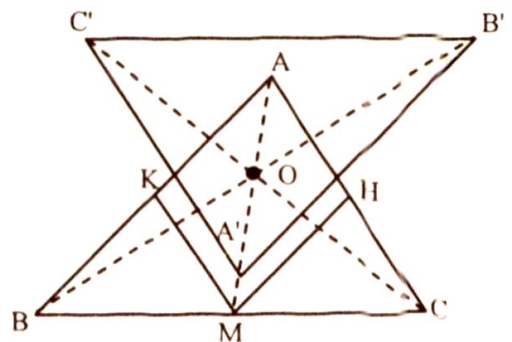
### Giải

$T$  là hình bình hành có hai cạnh liên tiếp nằm trên  $AB$  và  $AC$  và một đường chéo là  $AA'$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $AA'$  với cạnh  $BC$  và dựng hình bình hành  $AKMH$ , có  $MK \parallel AC$  và  $MH \parallel AB$  ( $K \in AB, H \in AC$ ).

Ta có  $T$  ở trong hình bình hành  $AKMH$ , do đó:  $S_T \leq S_{AKMH}$

và  $\frac{S_{AHK}}{S_{ABC}} = \frac{AK}{AB} \cdot \frac{AH}{AC}$ . Do  $MK \parallel AC$  và  $MH \parallel AB$  nên:

$$\frac{AK}{AB} = \frac{CM}{BC}, \frac{AH}{AC} = \frac{BM}{BC} \quad \text{và} \quad \frac{AK}{AB} + \frac{AH}{AC} = 1$$





Áp dụng bất đẳng thức Côsi:  $\frac{AK}{AC} \cdot \frac{AH}{AC} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{AK}{AB} + \frac{AH}{AC} \right)^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow S_{\Delta HK} \leq \frac{1}{4} S_{\Delta ABC} \Rightarrow S_{\Delta KMH} \leq \frac{1}{2} S_{\Delta ABC}.$

Vậy  $S_T$  lớn nhất khi O là trung điểm của trung tuyến AM.

## DẠNG 5: PHÉP QUAY

- Trong mặt phẳng cho một điểm O cố định và góc lượng giác  $\varphi$  không đổi. Phép biến hình biến điểm O thành điểm O, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho  $OM = OM'$  và  $(OM, OM') = \varphi$  được gọi là phép quay tâm O góc quay  $\varphi$ .

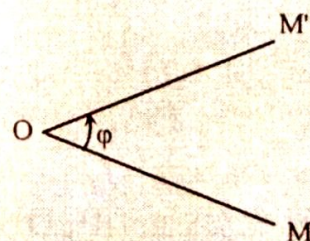
Phép quay thường được kí hiệu là Q, và nếu muốn chỉ rõ tâm quay O và góc quay  $\varphi$  thì ta kí hiệu phép quay đó là  $Q_{(O; \varphi)}$ .

- Đặc biệt khi  $\varphi = 180^\circ + k360^\circ$  (hay  $\pi + k2\pi$ ) thì phép quay là phép đối xứng tâm O.

Chú ý: - Góc quay của phép quay là một góc lượng giác.

- Cho phép quay góc  $\varphi$  biến đường thẳng d thành đường thẳng d', nếu  $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  thì góc  $(d, d') = \varphi$ , còn nếu  $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$  thì góc  $(d, d') = \pi - \varphi$ .

- Yếu tố liên quan đến phép quay là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, hình vuông, ... Từ đó vận dụng giải toán chứng minh, xác định điểm, tập hợp điểm, ...



**Ví dụ 1:** Trong mặt phẳng Oxy, qua phép quay tâm O, góc  $90^\circ$  xác định ảnh của:

a) Điểm I(3; 0)

b) Đường thẳng d:  $y = 2x$ .

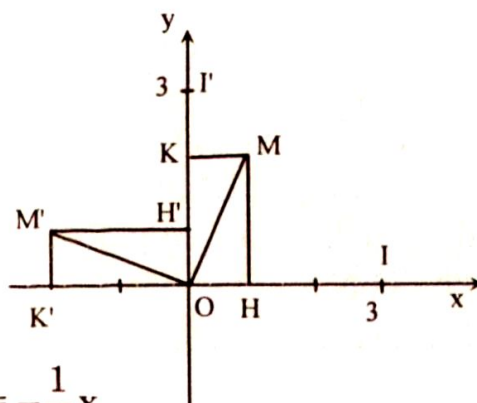
**Giải**

Phép quay tâm O, góc  $90^\circ$ :

a) Điểm I(3; 0) thành I'(0; 3)

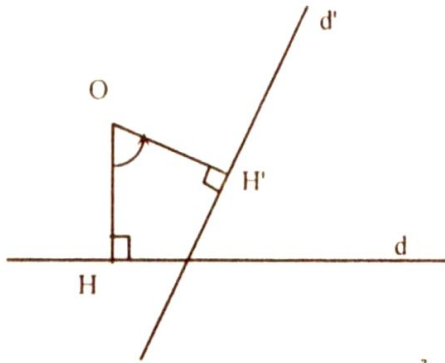
b) Đường thẳng d:  $y = 2x$  qua gốc O và M(1; 2) thì điểm O không thay đổi còn M biến thành M'(-2; 1).

Do đó ảnh của d là đường thẳng OM':  $y = -\frac{1}{2}x$ .



**Ví dụ 2:** Cho phép quay Q tâm O với góc quay  $\varphi$  và cho đường thẳng d. Hãy nêu cách dựng ảnh d' của d qua phép quay Q.





### Giải

Lấy hai điểm A, B phân biệt trên d, rồi dựng ảnh A', B' của chúng. Đường thẳng d' là đường thẳng đi qua A' và B'.

Cách khác: Nếu d không đi qua O, gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d, dựng H' là ảnh của H. Đường thẳng vuông góc với OH' tại H' chính là ảnh d' của d.

**Ví dụ 3:** Cho hai đoạn thẳng bằng nhau AB, A'B'. Hãy xác định phép quay biến A thành A', B thành B'.

### Giải

Phép quay tâm O góc  $\varphi$  biến A thành A', B thành B' thì O là điểm chung của 2 đường trung trực của AA' và BB'. Suy ra cách xác định phép quay như sau:

Dựng các đường trung trực a và b của AA' và BB'

- Xét  $a \parallel b$  khi đó không có phép quay nào thỏa mãn yêu cầu:
- Xét  $a \cap b = O$  thì O chính là tâm của phép quay và góc quay  $\varphi = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'})$ .
- Xét  $a \equiv b$  nếu AB cắt a tại O, khi đó A'B' cũng cắt a tại O. Ta có phép quay tâm O, góc quay  $\varphi = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'})$  còn nếu  $AB \parallel a$ , khi đó  $A'B' \parallel a$ , thì không có phép quay.

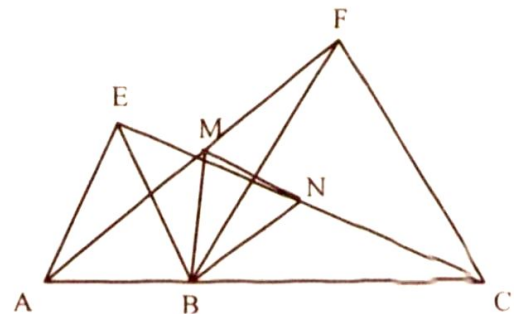
**Ví dụ 4:** Cho ba điểm thẳng hàng A, B, C điểm B nằm giữa hai điểm A và C. Dựng về một phía của đường thẳng AC các tam giác đều ABE và BCF. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và EC. Chứng minh tam giác BMN đều.

### Giải

Phép quay tâm B góc quay  $60^\circ$  biến các điểm E, C lần lượt thành các điểm A, F biến đoạn EC thành AF nên biến trung điểm N của EC thành trung điểm M của AF, do đó

$$BN = BM \text{ và } (\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BM}) = 60^\circ.$$

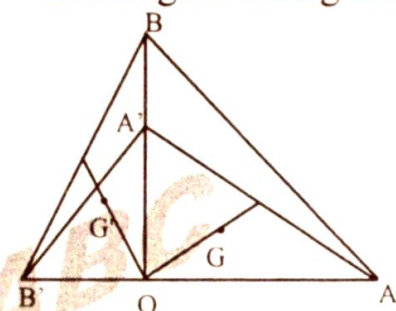
Vậy tam giác BMN đều.



**Ví dụ 5:** Cho hai tam giác vuông cân OAB và OA'B' có chung đỉnh O sao cho O nằm trên đoạn thẳng AB' và nằm ngoài đoạn thẳng A'B. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác OAA' và OBB'. Chứng minh GOG' là tam giác vuông cân.

### Giải

Phép quay O, góc quay  $90^\circ$  biến A thành B và biến A' thành B', biến tam giác OAA' thành tam giác OBB', nên biến trọng tâm G thành trọng tâm G'.





Do đó  $OG = OG'$  và  $\widehat{GOG'} = 90^\circ$ . Vậy  $GOG'$  là tam giác vuông cân tại đỉnh  $O$ .

**Ví dụ 6:** Cho tam giác  $ABC$  và vẽ ra ngoài hai hình vuông  $ABMN$ ,  $ACPQ$ .

- Chứng minh hai đoạn thẳng  $BQ$ ,  $CN$  bằng nhau và vuông góc với nhau.
- Gọi  $O$ ,  $O'$  là tâm của các hình vuông,  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh rằng tam giác  $OIO'$  vuông cân.

**Giải**

- Phép quay tâm  $A$ , góc  $-90^\circ$  biến  $B$  thành  $N$ ,  $Q$  thành  $C$ . Đoạn thẳng  $BQ$  biến thành đoạn thẳng  $NC$  nên  $BQ = NC$  và  $BQ \perp NC$ .

- Ta có  $OI \parallel NC$ ,  $OI = \frac{1}{2} NC$

và  $O'I \parallel QB$ ,  $O'I = \frac{1}{2} QB$ .

$\Rightarrow OI = O'I$ ,  $OI \perp O'I$  nên tam giác  $OIO'$  vuông cân tại đỉnh  $I$ .

Chú ý: Đây là bài toán gốc để giải các bài toán khác.

**Ví dụ 7:** Cho tam giác  $ABC$ . Dựng về phía ngoài của tam giác các hình vuông  $BCIJ$ ,  $ACMN$ ,  $ABEF$  và gọi  $O$ ,  $P$ ,  $Q$  lần lượt là tâm của chúng. Chứng minh  $AO$  vuông góc với  $PQ$  và  $AO = PQ$ .

**Giải**

Gọi  $D$  là trung điểm  $AB$  thì phép quay tâm  $C$  góc  $90^\circ$  biến  $MB$  thành  $AI$ , suy ra tam giác  $DPO$  vuông cân tại  $D$ .

Phép quay tâm  $D$ , góc  $90^\circ$  biến  $O$  thành  $P$ , biến  $A$  thành  $Q$ . Do đó  $OA = PQ$  và  $AO$  vuông góc với  $PQ$ .

**Ví dụ 8:** Cho tam giác  $ABC$ . Về phía ngoài tam giác dựng ba tam giác đều  $BCA_1$ ,  $ACB_1$ ,  $ABC_1$ . Chứng minh rằng  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  đồng quy.

**Giải**

Gọi  $I = AA_1 \cap CC_1$ .

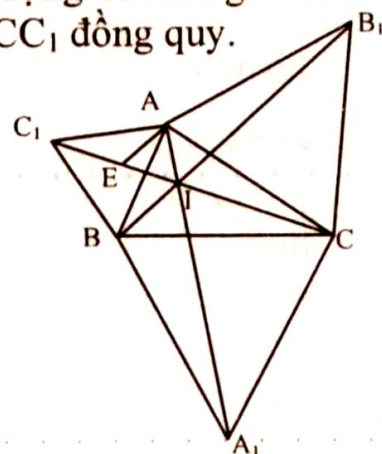
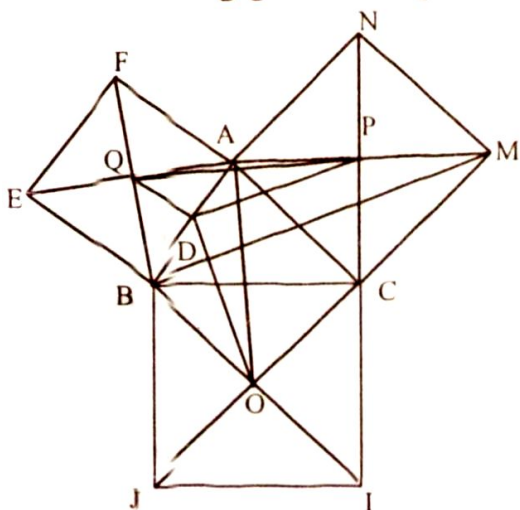
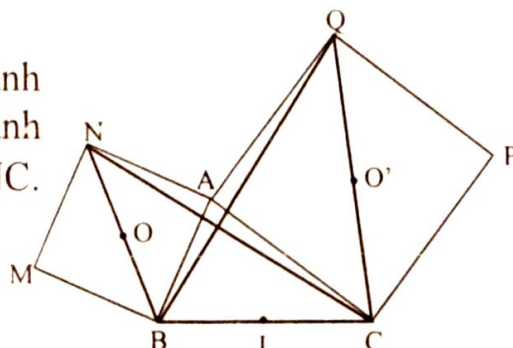
Phép quay tâm  $B$  góc  $60^\circ$  biến  $A_1$  thành  $C$ , biến  $A$  thành  $C_1$ , biến  $I$ ,  $C$  thành  $B_1$  và vì  $C_1$ ,  $E$ ,  $C$  thẳng hàng nên  $B$ ,  $I$ ,  $B_1$  thẳng hàng.

Vậy  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $A_1A$  thành  $CC_1$ , do đó  $\widehat{AIC_1} = 60^\circ$ .

Lấy trên  $CC_1$  điểm  $E$  sao cho

$IE \cong IA$  thì tam giác  $EIA$  đều.

Phép quay tâm  $A$  góc  $60^\circ$  biến  $C_1$  thành  $B$ , biến  $E$  thành  $CC_1$  đồng quy tại  $I$ .





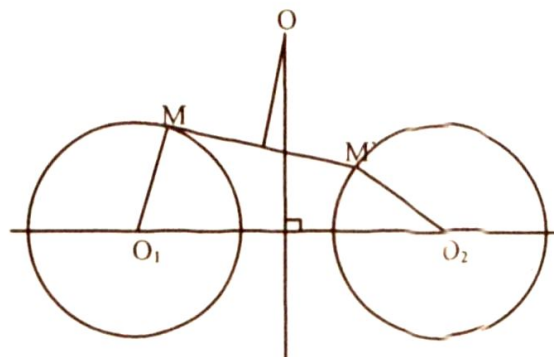
**Ví dụ 9:** Hai điểm M và M' lần lượt lưu động trên hai đường tròn bằng nhau  $(O_1)$  và  $(O_2)$  sao cho góc  $(\overrightarrow{O_1M}, \overrightarrow{O_2M'}) = \varphi$  không đổi. Chứng minh rằng đường trung trực của MM' qua một điểm cố định.

**Giải**

Gọi O là điểm ở trên đường trung trực của  $O_1O_2$  và  $(\overrightarrow{OO_1}, \overrightarrow{OO_2}) = \varphi$ .

Phép quay tâm O góc  $\varphi$  biến đường tròn  $(O_1)$  thành đường tròn  $(O_2)$ . điểm M thành M' nên  $OM = OM'$ .

Vậy đường trung trực của MM' qua O cố định.

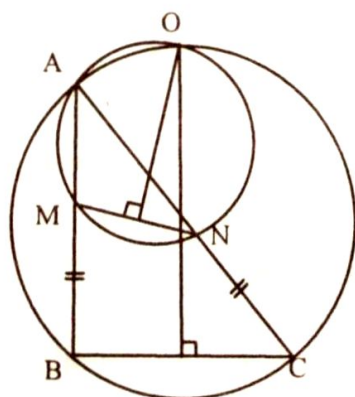


**Ví dụ 10:** Cho tam giác ABC. Lấy trên AB một điểm lưu động M và trên AC một điểm N sao cho  $BM = CN$ .

a) Chứng minh trung trực của MN qua 1 điểm cố định.

b) Chứng minh rằng đường tròn (AMN) qua 2 điểm cố định.

**Giải**



a) Ta có:  $BM = CN$  và

$$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CN}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \varphi$$

Vậy N là ảnh của M trong phép quay có góc quay  $\varphi$  biến B thành C.

Do đó đường trung trực của MN qua tâm quay O cố định là giao điểm của đường trung trực của BC và cung chứa góc  $\varphi$  dựng trên dây BC.

b) M và N là hai điểm tương ứng, và A là giao điểm của hai đường thẳng tương ứng BM và CN trong phép quay trên. Do đó góc  $(OM, ON) = (AM, AN)$  nên M, N, A, O cùng ở trên đường tròn. Vậy đường tròn (AMN) qua 2 điểm cố định A và O.

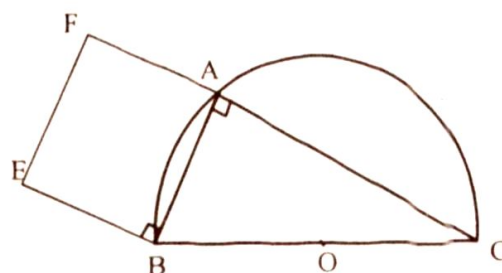
**Ví dụ 11:** Cho đa giác đều  $A_1A_2...A_n$  nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh  $\vec{v} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$

**Giải**

Phép quay tâm O góc  $\frac{2\pi}{n}$  hoặc  $-\frac{2\pi}{n}$  biến đa giác đều thành chính nó nên

không làm thay đổi vector  $\vec{v}$  nên  $\vec{v} = \vec{0}$ .

**Ví dụ 12:** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC. Điểm A chạy trên nửa đường tròn đó. Dựng về phía ngoài của tam giác ABC hình vuông ABEF. Chứng minh rằng E chạy trên một nửa đường tròn cố định.





### Giải

Ta có E là ảnh của A qua phép quay tâm B, góc  $90^\circ$ . Khi A chạy trên nửa đường tròn (O), E sẽ chạy trên nửa đường tròn (O') là ảnh của nửa đường tròn (O) qua phép quay tâm B, góc  $90^\circ$ .

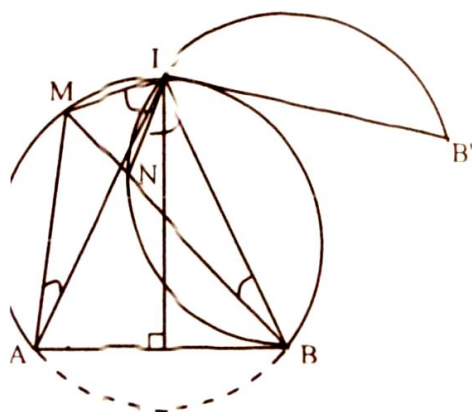
**Ví dụ 13:** Một điểm M lưu động trên cung AB lớn của đường tròn (O), với A, B là hai điểm cố định trên đường tròn này. Trên đoạn BM lấy điểm N sao cho  $BN = AM$ . Tìm tập hợp điểm N.

### Giải

Đường trung trực của cung AB cắt cung AB lớn tại I cố định.

Ta có hai tam giác IMA và INB bằng nhau (c.g.c)

$\Rightarrow IN = IM$  và  $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \varphi$ : không đổi nên phép quay tâm I góc  $\varphi$  biến M thành N.



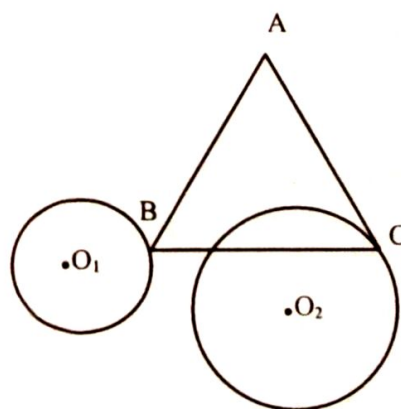
Vậy tập hợp điểm N là cung BIB' ảnh của cung AIB qua phép quay tâm I góc  $\varphi$

**Ví dụ 14** Cho điểm A dựng tam giác đều ABC theo chiều dương, biết đỉnh B, C lần lượt ở trên hai đường tròn  $(O_1)$ ,  $(O_2)$  cho trước.

### Giải

Ta có  $AB = AC$  và  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$  nên C là ảnh của B trong phép quay tâm A góc  $60^\circ$ . Do đó C là giao điểm của đường tròn  $(O_2)$  với đường tròn  $(O'_1)$  là ảnh của  $(O_1)$  trong phép quay trên.

Từ đó suy ra đỉnh B.



**Ví dụ 15** Cho hai đường thẳng a, b song song và một điểm G không nằm trên chúng. Xác định tam giác đều ABC có  $A \in a$ ,  $B \in b$  và G là trọng tâm của tam giác đó.

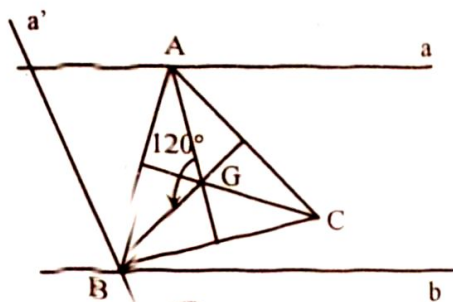
### Giải

Giả sử đã dựng được  $\triangle ABC$  thỏa mãn các điều kiện

Ta có:  $GA = GB = GC$  và

$\widehat{AGB} = \widehat{BGC} = \widehat{CGA} = 120^\circ$ , do đó trong phép quay Q tâm G góc  $120^\circ$  biến A thành B, biến a thành a' nên  $B = b \cap a'$ .

Từ đó suy ra cách dựng:



**ABC**



Dựng:  $a'$  là ảnh của  $a$  qua phép  $Q$  và  $B = b \cap a'$ . Các đỉnh  $A, C$  là ảnh của  $B$  qua phép quay tâm  $G$ , góc  $\pm 120^\circ$ .

Bài toán luôn có hai nghiệm hình, góc quay  $\pm 120^\circ$ .

**Ví dụ 16:** Cho tam giác  $ABC$ , có góc  $A = \varphi$ , và một điểm  $M$  nằm trên cạnh  $AB$ . Dựng trên các đường thẳng  $BC, CA$  các điểm  $N, P$  tương ứng sao cho  $MP = MN$  và đường tròn đi qua  $A, M, P$  tiếp xúc với  $MN$ .

**Giải**

Giả sử đã dựng được hai điểm:

$N \in BC, P \in AC$  thoả mãn các điều kiện.

Ta có  $\widehat{NMP} = \widehat{MAP} = \varphi$ ,

$MP = MN$  nên phép quay  $Q$  tâm  $M$ , góc  $-\varphi$  biến  $A$  thành  $A'$ ,  $PA$  thành  $NA'$ .

Gọi  $A'N \cap AC = I$ .

Ta có  $\widehat{NIC} = (\widehat{PA}, \widehat{NA'}) = \varphi$

$\Rightarrow \widehat{NIC} = \widehat{BAC} \Rightarrow IN \parallel AB$ .

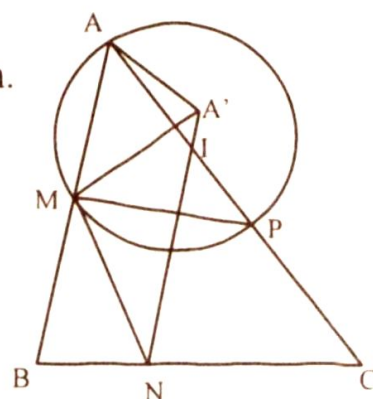
Từ đó suy ra cách dựng như sau:

– Phép quay tâm  $M$ , góc  $-\varphi$  biến  $A$  thành  $A'$ .

– Vẽ  $A'N \parallel AB, N \in BC$ .

– Dựng tia  $MP$  cắt  $AC$  tại  $P$  sao cho  $\widehat{NMP} = \varphi$  thì  $N$  và  $P$  là các điểm cần tìm.

Bài toán có một nghiệm duy nhất.

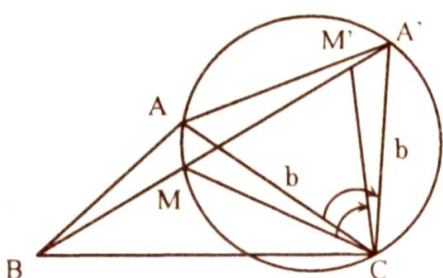


**Ví dụ 17:** Tam giác  $ABC$  có  $BC = a, AC = b, \hat{C} = \varphi$  ( $\varphi < 120^\circ$ ). Tìm điểm  $M$  trong mặt phẳng sao cho  $MA + MB + MC$  nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất của tổng đó.

**Giải**

Thực hiện phép quay:  $Q_{(C; -60^\circ)} : M \mapsto M', A \mapsto A'$ , thì  $MA = M'A'$ . Tam giác  $CMM'$  đều, nên  $MM' = CM$ .

Do đó:  $MA + MB + MC = BM + MM' + M'A' \geq A'B$ : không đổi



Theo định lí hàm số cosin trong tam giác  $A'BC$ :

$$A'B^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\varphi + 60^\circ).$$

Độ dài đường gấp khúc  $BMM'A'$  ngắn nhất khi  $M$  và  $M'$  nằm trên  $BA'$ , do đó  $\widehat{CMA'} = \widehat{CAA'} = 60^\circ$  nên thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ACA'$ .

Vậy điểm  $M$  cần tìm là giao của đường thẳng  $BA'$  và đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ACA'$ . Độ dài ngắn nhất của tổng là:

$$MA + MB + MC = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\varphi + 60^\circ)}.$$



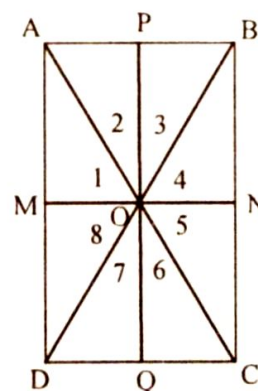
## DẠNG 6: HÌNH BẰNG NHAU

- Nếu  $ABC$  và  $A'B'C'$  là hai tam giác bằng nhau thì có phép dời hình biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $A'B'C'$ .
- Hai hình gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.
- Nếu hình  $(H_1)$  bằng hình  $(H_2)$  và hình  $(H_2)$  bằng hình  $(H_3)$  thì hình  $(H_1)$  bằng hình  $(H_3)$ .

**Ví dụ 1:** Một hình chữ nhật được chia thành 8 tam giác vuông và đánh số từ 1 đến 8. Hãy tìm các phép đối xứng trục, đối xứng tâm, phép tịnh tiến thích hợp để biến tam giác 1 lần lượt thành những tam giác còn lại.

**Giải**

- Tam giác 1 biến thành tam giác 2 qua phép đối xứng tâm là trung điểm  $AO$ .
- Tam giác 1 biến thành tam giác 3 qua phép đối xứng tâm là trung điểm  $AO$ , và phép đối xứng trục  $PQ$ .
- Tam giác 1 biến thành tam giác 4 qua phép đối xứng trục  $PQ$ .
- Tam giác 1 biến thành tam giác 5 qua phép đối xứng tâm  $O$ .
- Tam giác 1 biến thành tam giác 6 qua phép tịnh tiến theo vec tơ  $\overrightarrow{AO}$ .
- Tam giác 1 biến thành tam giác 7 qua phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{AO}$  và phép đối xứng trục  $PQ$ .
- Tam giác 1 biến thành tam giác 8 qua phép đối xứng trục  $MN$ .



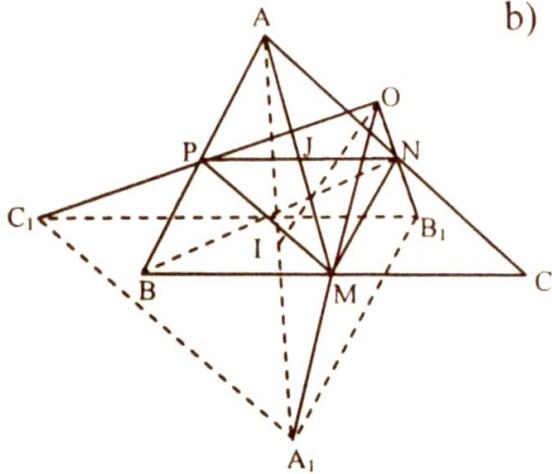
**Ví dụ 2:** Cho tam giác  $ABC$  và các điểm  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$ .

- a) Xét bốn tam giác  $APN, PBM, NMC, MNP$ . Tìm phép dời hình biến tam giác  $APN$  lần lượt thành một trong ba tam giác còn lại.
- b) Xét tam giác có ba đỉnh là trực tâm của ba tam giác  $APN, PBM$  và  $NCM$ . Chứng minh tam giác đó bằng tam giác  $APN$ . Chứng minh điều đó cũng đúng nếu thay trực tâm bằng trọng tâm, hoặc tâm đường tròn ngoại tiếp, hoặc tâm đường tròn nội tiếp.

**Giải**

- a) Phép tịnh tiến vector  $\overrightarrow{AP}$  biến tam giác  $APN$  thành tam giác  $PBM$ . Phép tịnh tiến vector  $\overrightarrow{AN}$  biến tam giác  $APN$  thành tam giác  $NMC$ . Phép đối xứng tâm  $J$  là trung điểm của  $PN$ , biến tam giác  $APN$  thành tam giác  $MNP$ .



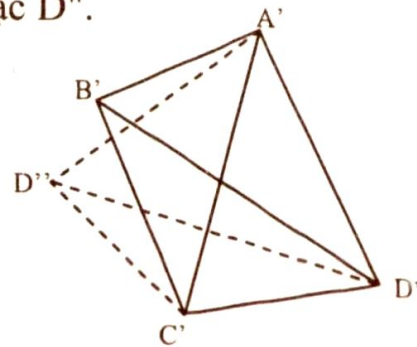
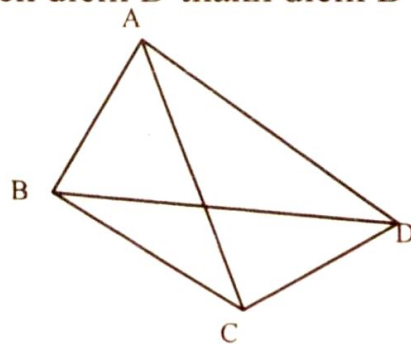


- b) Gọi  $H_1, H_2, H_3$  lần lượt là trực tâm của các tam giác  $APN, PBM, NMC$ . Phép tịnh tiến  $\overrightarrow{AP}$  biến tam giác  $APN$  thành tam giác  $PBM$  nên biến  $H_1$  thành  $H_2$ , tức là  $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{AP}$  nên  $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{PH_2}$ . Suy ra  $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{PH_2} = \overrightarrow{NH_3}$ . Do đó phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{AH_1}$  biến tam giác  $APN$  thành tam giác  $H_1H_2H_3$ .  
Đối với trọng tâm tam đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp, chứng minh hoàn toàn tương tự.

- Ví dụ 3:** a) Chứng minh rằng hai tứ giác có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp đường chéo tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.  
b) Chứng minh rằng hai tứ giác lồi có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp góc tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.  
c) Hai tứ giác lồi có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau thì có bằng nhau hay không?

### Giải

- a) Giả sử hai tứ giác lồi  $ABCD$  và  $A'B'C'D'$  có  $AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DA = D'A'$  và  $AC = A'C'$ . Khi đó hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  bằng nhau nên có phép dời hình  $F$  biến ba điểm  $A, B, C$  lần lượt thành ba điểm  $A', B', C'$ . Gọi  $D''$  là điểm đối xứng của  $D'$  qua  $A'C'$  thì hai tam giác  $A'C'D'$  và  $A'C'D''$  bằng nhau nên cùng bằng tam giác  $ACD$ . Do đó phép  $F$  chỉ có thể biến điểm  $D$  thành điểm  $D'$  hoặc  $D''$ .



Vì  $ABCD$  là tứ giác lồi nên hai đoạn thẳng  $AC$  và  $BD$  cắt nhau,  $A'B'C'D'$  cũng là tứ giác lồi nên hai đoạn thẳng  $A'C'$  và  $B'D'$  cắt nhau, và do đó hai đoạn thẳng  $A'C'$  và  $B'D''$  không cắt nhau. Từ đó ta suy ra  $F$  biến  $D$  thành  $D'$ . Vậy  $F$  biến tứ giác  $ABCD$  thành tứ giác  $A'B'C'D'$  và do đó hai tứ giác đó bằng nhau.

- b) Giả sử hai tứ giác lồi  $ABCD$  và  $A'B'C'D'$  có  $AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DA = D'A'$  và góc  $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ . Khi đó  $AC = A'C'$  nên đưa về trường hợp ở câu a).  
c) Có thể không bằng nhau. Hai hình thoi có cạnh bằng nhau nhưng có thể là hai hình không bằng nhau.



**Ví dụ 4:** Đa giác lồi  $n$  cạnh gọi là  $n$  – giác đều nếu tất cả các cạnh của nó bằng nhau và tất cả các góc của nó bằng nhau. Chứng tỏ rằng hai  $n$ –giác đều bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cạnh bằng nhau.

### Giải

Theo định nghĩa, hai  $n$ –giác đều bằng nhau thì cạnh bằng nhau. Ngược lại giả sử hai  $n$ –giác đều  $A_1A_2...A_n$  và  $A'_1A'_2...A'_n$  có cạnh bằng nhau. Khi đó nếu gọi  $O$  và  $O'$  lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp hai đa giác đó thì hai tam giác  $OA_1A_2$  và  $O'A'_1A'_2$  bằng nhau nên có phép dời hình  $F$  biến tam giác  $OA_1A_2$  thành tam giác  $O'A'_1A'_2$ . Vì hai tam giác  $OA_2A_3$  và  $O'A'_2A'_3$  cũng bằng nhau nên  $F$  biến điểm  $A_3$  thành điểm  $A'_3$  (vì  $A_3$  không thể biến thành  $A'_1$ ). Tương tự  $F$  biến các điểm  $A_4, ..., A_n$  lần lượt thành các điểm  $A'_4, ..., A'_n$ . Vậy hai  $n$ –giác đều đã cho bằng nhau.

**Ví dụ 5:** Hình  $(H_1)$  gồm ba đường tròn  $(O_1; r_1)$ ,  $(O_2; r_2)$  và  $(O_3; r_3)$  đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Hình  $(H_2)$  gồm ba đường tròn  $(I_1; r_1)$ ,  $(I_2; r_2)$  và  $(I_3; r_3)$  đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Chứng tỏ rằng hai hình  $(H_1)$  và  $(H_2)$  bằng nhau.

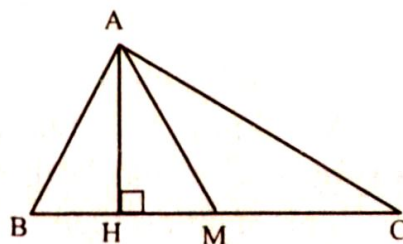
### Giải

Hai tam giác  $O_1O_2O_3$  và  $I_1I_2I_3$  có các cạnh bằng nhau  $O_1O_2 = I_1I_2 = r_1 + r_2$ ,  $O_2O_3 = I_2I_3 = r_2 + r_3$ ,  $O_3O_1 = I_3I_1 = r_3 + r_1$  nên có phép dời hình  $F$  biến ba điểm  $O_1, O_2, O_3$  lần lượt thành ba điểm  $I_1, I_2, I_3$ . Khi đó  $F$  biến ba đường tròn  $(O_1; r_1)$ ,  $(O_2; r_2)$ ,  $(O_3; r_3)$  lần lượt thành ba đường tròn  $(I_1; r_1)$ ,  $(I_2; r_2)$ ,  $(I_3; r_3)$ , tức là biến hình  $(H_1)$  thành hình  $(H_2)$ . Vậy hai hình  $(H_1)$  và  $(H_2)$  bằng nhau.

**Ví dụ 6:** Chứng minh rằng hai tam giác vuông bằng nhau nếu có các cạnh huyền bằng nhau và đường cao ứng với cạnh huyền bằng nhau.

### Giải

Cho hai tam giác  $ABC$ ,  $A'B'C'$  vuông tại các đỉnh  $A$ ,  $A'$ . Có  $BC = B'C'$  và hai đường cao  $AH$ ,  $A'H'$  bằng nhau. Gọi  $AM$ ,  $A'M'$  là các đường trung tuyến thì  $AM = A'M'$  và do đó hai tam giác vuông  $AHM$  và  $A'H'M'$  bằng nhau.



Gọi  $F$  là phép dời hình biến tam giác  $AHM$  thành tam giác  $A'H'M'$  thì  $F$  biến đoạn thẳng  $BC$  thành đoạn thẳng  $B'C'$  hoặc thành đoạn thẳng  $C'B'$ .

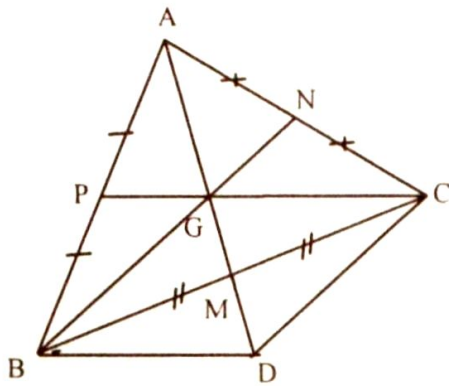
Vậy hai tam giác đã cho bằng nhau.

**Ví dụ 7:** Chứng minh rằng nếu ba trung tuyến của tam giác  $ABC$  lần lượt bằng ba trung tuyến của tam giác  $A'B'C'$  thì hai tam giác đó bằng nhau.

### Giải

Giả sử tam giác  $ABC$  có ba trung tuyến  $AM$ ,  $BN$ ,  $CP$  cắt nhau tại  $G$  và tam giác  $A'B'C'$  có ba trung tuyến  $A'M'$ ,  $B'N'$ ,  $C'P'$  cắt nhau tại  $G'$ , và  $AM = A'M'$ ,  $BN = B'N'$ ,  $CP = C'P'$ .





Lấy điểm D và D' sao cho BGCD và B'G'C'D' là những hình bình hành. Ta có hai tam giác GCD và G'C'D' bằng nhau. Bởi vậy, có một phép dời hình F biến G, C, D lần lượt thành các điểm G', C', D'. Rõ ràng khi đó F biến A thành A', B thành B' nên hai tam giác ABC và A'B'C' bằng nhau.

**Ví dụ 8:** Chứng minh rằng hai tam giác bằng nhau nếu có các đường tròn nội tiếp bằng nhau, một cặp đường tròn bàng tiếp bằng nhau, đồng thời khoảng cách từ tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp đó của hai tam giác cũng bằng nhau.

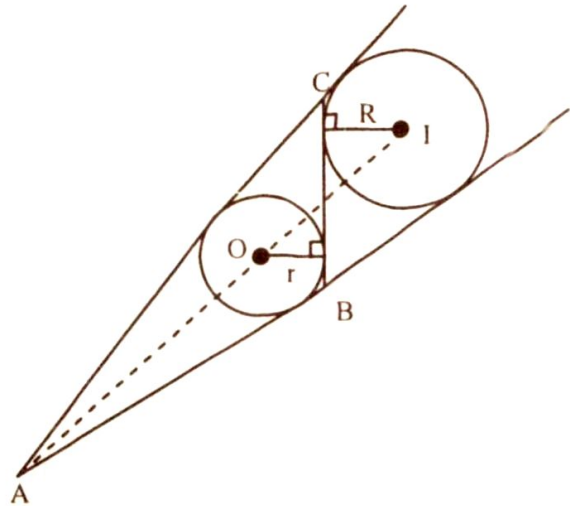
### Giải

Giả sử tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (O; r), đường tròn bàng tiếp góc A là (I; R), tam giác A'B'C' có đường tròn nội tiếp (O'; r), đường tròn bàng tiếp (I'; R) đồng thời  $OI = O'I'$ .

Vì  $OI = O'I'$  nên có phép dời hình F biến O thành O' và I thành I', do đó F biến (O; r) thành (O'; r) và biến (I; R) thành (I'; R).

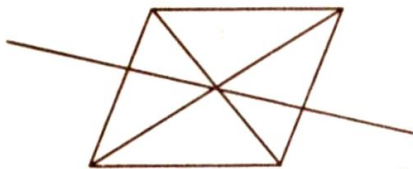
Khi đó F biến cặp tiếp tuyến chung ngoài AB và AC của hai đường tròn (O) và (I) thành cặp tiếp tuyến chung ngoài A'B' và A'C' (hoặc thành A'C' và A'B') còn tiếp tuyến chung BC phải biến thành tiếp tuyến chung B'C'.

Suy ra F biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' hoặc thành tam giác A'C'B', tức là hai tam giác ABC và A'B'C' bằng nhau.



**Ví dụ 9:** Cho hai hình bình hành. Hãy vẽ một đường thẳng chia mỗi hình bình hành đó thành hai hình bằng nhau.

### Giải



Một đường thẳng đi qua tâm O của hình bình hành thì chia hình bình hành đó thành hai phần bằng nhau, vì phép đối xứng qua tâm O sẽ biến phần này thành phần kia. Do đó, vẽ đường thẳng đi qua 2 tâm của chúng thì chia

mỗi hình bình hành thành hai phần bằng nhau.

Nếu tâm hai hình bình hành trùng nhau thì mọi đường thẳng đi qua tâm chung đều chia mỗi hình bình hành thành hai phần bằng nhau.



### C. BÀI LUYỆN TẬP

- Trong mặt phẳng Oxy, phép biến hình nào sau đây là phép dời hình:  
a) Phép biến hình  $F_1$  biến mỗi điểm  $M(x; y)$  thành điểm  $M'(x+2; y+2)$ .  
b) Phép biến hình  $F_2$  biến mỗi điểm  $M(x; y)$  thành điểm  $M'(3x; 3y)$ .  
**ĐS:** a) phép dời hình      b) không phải là phép dời hình
- Cho phép biến hình  $F$  biến điểm  $M$  thành điểm  $M'$ . Phép biến hình biến ngược lại  $M'$  thành  $M$  gọi là phép biến hình đảo ngược của phép biến hình  $F$ . Xác định phép biến hình đảo ngược của phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm, phép quay.  
**ĐS:** phép biến hình đảo ngược của phép tịnh tiến theo vector  $\vec{v}$  là phép tịnh tiến theo vector  $-\vec{v}$ , của phép đối xứng trục  $d$  chính là phép đối xứng trục  $d$ , của phép đối xứng tâm  $O$  chính là phép đối xứng tâm  $O$ , của phép quay tâm  $O$  góc quay  $\varphi$  là phép quay tâm  $O$  góc quay  $-\varphi$ .
- Cho hai điểm  $A, B$  và đường thẳng  $d$ , đường tròn  $(C)$ . Dựng hai điểm  $C \in d, D \in (C)$  để  $ABCD$  là hình bình hành.  
**HD:** dùng phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{AB}$
- Dựng hình thang  $ABCD$  có  $AB \parallel CD, AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$  cho trước.  
**HD:** dùng phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$  xác định
- Dựng tứ giác  $ABCD$  biết  $AB = a, BC = b, CD = c$  và góc  $\hat{A} = \alpha, \hat{D} = \beta$  cho trước.  
**HD:** dùng phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$  xác định
- Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$  tâm  $O$ . Tìm  $M, N$  thuộc cạnh  $AB, DC$  sao cho  $MN \parallel BC$  và  $OM + MN + NB$  bé nhất.  
**HD:** dùng phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{CB} = \vec{v}$  xác định và phép đối xứng trục là đường thẳng  $AB$
- Một hình bình hành  $ABCD$  có hai đỉnh  $A, B$  cố định, còn đỉnh  $C$  thay đổi trên một đường thẳng  $d$ . Tìm quỹ tích đỉnh  $D$ .
- Cho điểm  $O$  cố định và một đường thẳng  $a$  cố định. Xét các đường tròn  $(I; R)$  có bán kính  $R$  không đổi và luôn đi qua điểm  $O$ . Gọi  $BB'$  là đường kính của  $(I; R)$  sao cho  $BB' \parallel a$ . Tìm quỹ tích của  $B$  và  $B'$ .  
**HD:** dùng phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{IB} = \vec{v}$  xác định
- Cho tam giác  $MAN$  cân tại  $M$  và  $N$  lưu động trên tia  $Ax$  cố định. Tìm quỹ tích đỉnh  $M$  biết đường tròn ngoại tiếp tam giác  $MAN$  có bán kính  $R$  cho trước.
- Cho hình thoi  $ABCD$  cạnh  $a$  lưu động mà 2 đường chéo  $AC, BD$  qua  $I, J$  cố định,  $IJ$  vuông góc với  $AB$ . Tìm quỹ tích trung điểm  $BC$  và đỉnh  $A$ .  
**HD:** dùng phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$  xác định



- 11.** Chứng minh tứ giác lồi có tổng 2 cạnh đối bằng 2 lần đoạn nối trung điểm 2 cạnh còn lại là 1 hình thang.
- 12.** Cho tam giác ABC, vẽ hình vuông BCDE ra phía ngoài. Hạ  $DI \perp AB$ ,  $EK \perp AC$ ,  $AH \perp BC$ . Chứng minh 3 đường thẳng đó đồng quy.  
**HD:** dùng phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{BE}$
- 13.** Cho hai đường thẳng  $a$  và  $a'$ . Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến đường thẳng này thành đường thẳng kia?  
**HD:** xét 3 vị trí tương đối của 2 đường thẳng
- 14.** Cho đường tròn  $(O, r)$ , đường thẳng  $\Delta$  và một đường thẳng  $d$ . Hãy xác định hai điểm M và M' lần lượt nằm trên đường tròn, đường thẳng  $\Delta$  sao cho  $d$  là trung trực của đoạn thẳng MM'.  
**HD:** dùng phép đối xứng trục  $d$
- 15.** Cho A, B không thuộc đoạn MN. Tìm X thuộc MN để  $\widehat{MXA} = 2\widehat{NXB}$ .
- 16.** Cho A, B không thuộc đường thẳng  $d$ . M lưu động trên  $d$ . Tìm GTNN và GTLN của  
a)  $P = MA + MB$                                       b)  $Q = |MA - MB|$ .  
**HD:** xét A, B khác phía đối với  $d$  và A, B cùng phía đối với  $d$ .
- 17.** Cho tam giác ABC nhọn. Dựng 3 điểm M, N, P thuộc 3 cạnh BC, CA, AB mà tam giác MNP có chu vi bé nhất.  
**HD:** M, N, P là 3 chân đường cao của tam giác ABC
- 18.** Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn  $(O)$  có B, C cố định còn A lưu động. Tìm quỹ tích :  
a) Điểm đối xứng A' của A qua BC.  
b) Trục tâm H.
- 19.** Trong góc nhọn xOy cho tia Oz cố định. M lưu động trên Oz có điểm đối xứng qua Ox, Oy là  $M_1, M_2$ . Tìm quỹ tích trung điểm I của  $M_1, M_2$ .  
**HD:** tìm quỹ tích của  $M_1, M_2$  rồi suy ra quỹ tích trung điểm I
- 20.** Cho đường thẳng  $d$  đi qua trọng tâm H của tam giác ABC. Chứng minh 3 đường thẳng đối xứng của  $d$  qua 3 cạnh đồng quy tại 1 điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp.
- 21.** Tìm trục đối xứng và tâm đối xứng của hình quạt, hình viên phân.
- 22.** Xác định ảnh của điểm  $A(3;-2)$ , đường thẳng  $d: 3x - 6y + 1 = 0$  và đường tròn  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$  qua:  
a) tâm I(1; 3)                                      b) đường thẳng  $\Delta: 2x + y - 5 = 0$
- 23.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  và một điểm A. Tìm hai điểm M và N lần lượt nằm trên hai đường tròn đó sao cho A là trung điểm của MN.  
**HD:** phép đối xứng tâm A
- 24.** Cho I ở trong góc xOy. Dựng đường thẳng  $d$  qua I cắt Ox, Oy tại A, B mà I trung điểm đoạn AB.
- 25.** Dựng tứ giác biết trước 4 trung điểm của 4 cạnh.  
**HD:** Nếu 4 trung điểm là 4 đỉnh của hình bình hành thì có vô số tứ giác, còn ngược lại thì không tồn tại.



26. Dựng  $n$ -giác biết trước  $n$  trung điểm của  $n$  cạnh
27. Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $A, C$  cố định. Tìm quỹ tích  $D$  khi  $B$  lưu động trên đường tròn  $(O)$ .
28. Cho  $M$  lưu động trên đường thẳng  $d$  và  $I$  cố định. Tìm quỹ tích các điểm  $N$  sao cho  $I$  là trung điểm  $MN$ .
29. Cho tam giác  $ABC$  có 2 trung tuyến  $AM, CN$  mà  $\widehat{BAM} = \widehat{BCN} = 30^\circ$ . Chứng minh tam giác  $ABC$  đều.
30. Cho hai đường tròn bằng nhau tiếp xúc ngoài tại  $M$ . Ba đường thẳng qua  $M$  cắt  $(O_1)$  và  $(O_2)$  tại  $A_1, B_1, C_1$  và  $A_2, B_2, C_2$ . Chứng minh  $M$  là trung điểm đoạn nối tâm hai đường tròn nội tiếp tam giác  $A_1B_1C_1$  và  $A_2B_2C_2$ .  
**HD:** dùng phép đối xứng tâm  $M$
31. Cho hình bình hành  $MNPQ$  nội tiếp hình bình hành  $ABCD$  (4 đỉnh nằm trên 4 cạnh). Chứng minh hai hình bình hành có cùng tâm đối xứng.
32. Tìm ảnh của tam giác đều  $ABC$  tâm  $O$  qua phép quay:  
a) Tâm quay  $A$  góc quay  $60^\circ$ .  
b) Tâm quay  $O$  góc quay  $120^\circ$ .  
**HD:** dùng định nghĩa
33. Cho điểm  $A$ , đường tròn  $(O)$  và đường thẳng  $d$ . Tìm ảnh của  $(O)$  và  $d$  qua phép quay tâm  $A$  góc  $90^\circ$ .
34. Chứng minh phép quay:  
a) Bảo toàn độ dài đoạn thẳng và tính thẳng hàng của 3 điểm.  
b) Góc của đường thẳng và ảnh của nó bằng đúng góc quay.  
**HD:** dùng định nghĩa, hệ thức Salơ
35. Cho tam giác đều  $ABC$  và  $M$  bất kỳ. Chứng minh đoạn lớn nhất trong 3 đoạn  $MA, MB, MC$  thì không lớn hơn tổng 2 đoạn còn lại.  
**HD:** dùng phép quay tâm  $B$  góc  $60^\circ$
36. Cho 3 đường thẳng  $a, b, c$  song song đôi một. Lấy  $A \in a$ . Dựng điểm  $B \in b$  và điểm  $C \in c$  sao cho tam giác  $ABC$  đều.  
**HD:** dùng phép quay tâm  $A$  góc  $60^\circ$
37. Cho tam giác  $ABC$ . Dựng 2 đường tròn bằng nhau  $(C_1)$  qua  $A, B$  và  $(C_2)$  qua  $A, C$  mà 2 tiếp tuyến tại  $A$  vuông góc nhau.
38. Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  cố định,  $A$  lưu động trên đường thẳng  $d$ .  
a) Tìm quỹ tích đỉnh  $B, D$ .  
b) Tìm quỹ tích đỉnh  $C$ .
39. Cho  $A \in (O)$  và  $M$  lưu động trên  $(O)$ . Tìm quỹ tích:  
a) Đỉnh thứ 3 của tam giác đều  $AMK$ .  
b) Đỉnh thứ 4 của hình bình hành  $OAMN$ .
40. Tam giác  $ABC$  đều, tìm  $M$  trong tam giác  $ABC$  để  $MA + MB + MC$  bé nhất.

**ABC**



41. Cho tam giác ABC có  $\hat{A} = 60^\circ$ . Tìm  $M \in AB, N \in AC$  sao cho  $BC = 2MN$  và  $BM = CN$ .
42. Cho góc vuông xOy. Trên tia phân giác Ot lấy A, đặt  $OA = a$ . Đường tròn lưu động qua O, A cắt Ox, Oy tại M, N.
- Tìm phép quay tâm A biến M thành N.
  - Chứng minh  $OM + ON$  không đổi.
  - Tìm quỹ tích trung điểm I của MN.
- ĐS:** c) trung trực của OA
43. Tìm các điểm bất động (điểm không thay đổi qua phép biến hình) qua phép  $\mathcal{D}_O, \mathcal{D}_d, T_{\vec{v}}, Q_{(O;\varphi)}$ .
- HD:** dùng định nghĩa của các phép  $\mathcal{D}_O, \mathcal{D}_d, T_{\vec{v}}, Q_{(O;\varphi)}$  và cho điều kiện M trùng ảnh M'
44. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Chứng minh hai tam giác AHB và AHC bằng nhau.
- HD:** dùng phép đối xứng trục AH
45. Cho tam giác ABC đều tâm O. Chứng minh ba tam giác OAB, OBC và OCA bằng nhau.
- HD:** dùng phép đối xứng trục hoặc phép quay
46. Chứng minh hai hình chữ nhật có cùng chiều dài và chiều rộng thì bằng nhau.
47. Chứng minh hai ngũ giác đều nội tiếp trong hai đường tròn bằng nhau thì bằng nhau.
- HD:** dùng hợp thành của phép tịnh tiến và phép quay
48. Cho phép tịnh tiến  $\overrightarrow{AA'}$  biến hình bình hành ABCD thành A'B'C'D'. Chứng minh:  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AC'}$
49. Cho tam giác ABC cân tại C. Lấy  $M \in AC, N \in BC$  sao cho  $CM + CN = AC$ . Chứng minh 3 trung điểm AC, BC, MN thẳng hàng.
50. Cho M trong tam giác ABC. Dựng  $N \in AC, P \in BC$  sao cho tam giác MNP cân tại M và PN song song AB.
- HD:** dùng phép đối xứng trục
51. Cho hình chữ nhật ABCD. Trên tia đối của tia AB lấy điểm P, trên tia đối của tia CD lấy điểm Q. Hãy xác định một điểm M trên cạnh BC và một điểm N trên cạnh AD sao cho MN song song CD và tổng  $PN + QM$  nhỏ nhất.
- HD:** dùng phép tịnh tiến vector  $\overrightarrow{AB}$ .



## §3. PHÉP ĐỒNG DẠNG

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### • PHÉP VỊ TỰ:

– Cho điểm  $O$  và một số  $k \neq 0$ . Phép biến hình biến một điểm  $M$  thành điểm  $M'$  sao cho  $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$  được gọi là phép vị tự tâm  $O$ , tỉ số  $k$ .

– Nếu  $M', N'$  theo thứ tự là ảnh của  $M, N$  qua phép vị tự tỉ số  $k$  thì  $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ ;  $M'N' = |k| \cdot MN$ .

– Phép vị tự tỉ số  $k$  biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy; biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho, biến tia thành tia, biến đoạn thành đoạn thẳng; biến một tam giác thành tam giác đồng dạng với tam giác đã cho; biến góc thành góc bằng nó; biến một đường tròn có bán kính  $R$  thành đường tròn có bán kính  $|k|R$ .

– Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.

#### • PHÉP ĐỒNG DẠNG:

– Phép biến hình  $G$  gọi là phép đồng dạng tỉ số  $k$  ( $k > 0$ ) nếu với hai điểm bất kì  $M, N$  và ảnh  $M', N'$  của chúng, ta có  $M'N' = kMN$ .

– Mọi phép đồng dạng  $F$  tỉ số  $k$  đều là hợp thành của một phép vị tự  $V$  tỉ số  $k$  và một phép dời hình  $D$ .

– Phép đồng dạng biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng (và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó), biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với  $k$  ( $k$  là tỉ số của phép đồng dạng), biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số  $k$ , biến đường tròn có bán kính  $R$  thành đường tròn có bán kính  $kR$ , biến góc thành góc bằng nó.

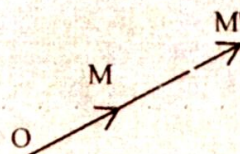
– Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

### B. PHÂN IẠNG TOÁN

#### DẠNG 1: PHÉP VỊ TỰ

Cho một điểm  $O$  cố định và một số  $k$  không đổi  $k \neq 0$ . Phép biến hình biến mỗi điểm  $M$  thành điểm  $M'$  sao cho  $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$  được gọi là phép vị tự tâm  $O$  tỉ số  $k$ .

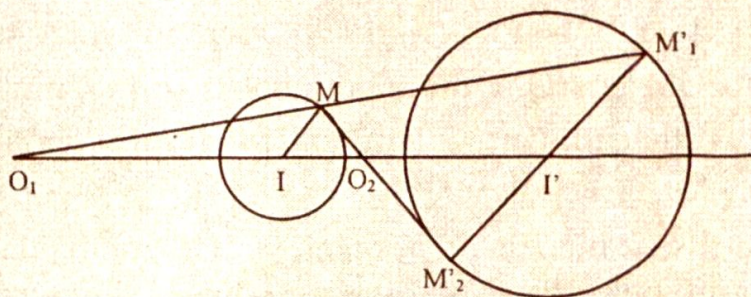
Kí hiệu phép vị tự bởi chữ  $V$ , nếu cần nói rõ tâm  $O$  và tỉ số  $k$  thì kí hiệu là  $V_{(O, k)}$ .





Nếu phép vị tự tỉ số  $k$  biến hai điểm  $M$  và  $N$  lần lượt thành hai điểm  $M'$  và  $N'$  thì  $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$  và  $M'N' = |k|MN$ .

Nếu có phép vị tự tâm  $O$  biến đường tròn này thành đường tròn kia thì  $O$  được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn đó. Phép vị tự đó có tỉ số dương thì điểm  $O$  gọi là tâm vị tự ngoài, phép vị tự đó có tỉ số âm thì điểm  $O$  gọi là tâm vị tự trong.



Hai đường tròn không đồng tâm  $(I; R)$  và  $(I'; R')$ . Nếu  $R \neq R'$  thì có hai tâm vị tự  $O_1$  và  $O_2$  xác định bởi  $\overrightarrow{O_1I'} = k\overrightarrow{O_1I}$  và  $\overrightarrow{O_2I'} = -k\overrightarrow{O_2I}$  với  $k = \frac{R'}{R}$  hoặc là giao điểm của đường nối tâm  $II'$  với đường thẳng qua 2 mút của cặp vectơ bán kính cùng hướng  $\overrightarrow{IM}$ ,  $\overrightarrow{I'M'_1}$  và ngược hướng  $\overrightarrow{IM}$ ,  $\overrightarrow{I'M'_2}$ . Nếu  $R = R'$  chỉ có một tâm vị tự  $O_2$ , là trung điểm của  $II'$ , tỉ số  $k = -1$  chính là phép đối xứng tâm  $O_2$ .

Chú ý: – Phép vị tự tâm  $O$  tỉ số  $k$  là một phép đồng dạng tỉ số  $|k|$  nên có các tính chất của phép đồng dạng. Ngoài ra, phép vị tự có tính chất đặc biệt sau: đường thẳng nối một điểm và ảnh của nó luôn luôn đi qua  $O$ ; ảnh  $d'$  của đường thẳng  $d$  luôn song song hoặc trùng với  $d$ , bảo toàn sự tiếp xúc, ...

– Yếu tố liên quan đến phép vị tự là thẳng hàng và tỉ số không đổi từ đó, vận dụng phép vị tự để giải toán chứng minh, xác định điểm, dựng hình, quỹ tích (tập hợp điểm) ảnh của  $M$  khi biết quỹ tích của  $M$ , ...

**Ví dụ 1:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng  $d$  có phương trình  $2x + y - 4 = 0$ . Hãy viết phương trình của đường thẳng  $d'$  là ảnh của  $d$  qua phép vị tự tâm  $O$  tỉ số  $k = 4$ .

**Giải**

Lấy  $A(0; 4)$  và  $B(2; 0)$  thuộc  $d$ . Phép vị tự tâm  $O$  tỉ số  $k = 4$ , biến  $A$  thành  $A'$ ,  $B$  thành  $B'$ .

Ta có  $\overrightarrow{OA'} = 4\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB'} = 4\overrightarrow{OB}$  nên  $A'(0; 16)$ ,  $B'(8; 0)$

Do đó  $d'$  là đường thẳng qua  $A'$ ,  $B'$  có phương trình đoạn chắn:

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{16} = 1 \Leftrightarrow 2x + y - 16 = 0.$$

**Ví dụ 2:** Trong mặt phẳng Oxy cho hai parabol có phương trình  $y = ax^2$  và  $y = bx^2$  ( $a \neq b$ ). Chứng minh rằng có một phép vị tự biến parabol này thành parabol kia.



### Giải

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép vị tự  $V_{(O; k)}$  biến điểm  $M(x; y)$  thành  $M'(kx, ky)$ .

Gọi  $(P_1)$  là parabol:  $y = ax^2$  và  $(P_2)$  là parabol:  $y = bx^2$ .

Ta chứng minh rằng  $V_{(O; k)}: (P_1) \rightarrow (P_2)$  với  $k = \frac{b}{a}$ .

Thật vậy, nếu  $M(x_1; y_1) \in (P_1)$  thì  $(x_1; y_1) = (x_1; ax_1^2)$  nên ảnh  $M'$  có tọa độ:

$$\left( \frac{a}{b}x_1; \frac{a}{b}ax_1^2 \right) = \left( \frac{a}{b}x_1; b\left(\frac{a}{b}x_1\right)^2 \right) = (x_2; bx_2^2) \in (P_2): \text{đpcm.}$$

**Ví dụ 3:** Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm  $A(2; 1)$  và  $B(8; 4)$ . Tìm tọa độ tâm vị tự của hai đường tròn  $(A; 2)$  và  $(B; 4)$ .

### Giải

Hai đường tròn đã cho không đồng tâm và có bán kính  $R = 2, R' = 4$  nên có hai phép vị tự tỉ  $k = \pm \frac{R'}{R} = \pm 2$ , biến đường tròn  $(A; 2)$  thành đường tròn  $(B; 4)$ . Gọi  $I(x; y)$  là tâm vị tự, ta có:

$$\overrightarrow{IB} = \pm 2\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - x = \pm 2(2 - x) \\ 4 - y = \pm 2(1 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4; y = -2 \\ x = 4; y = 2 \end{cases}$$

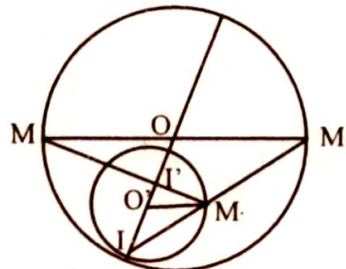
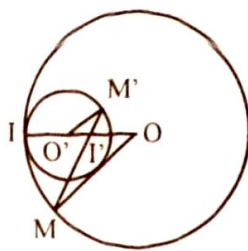
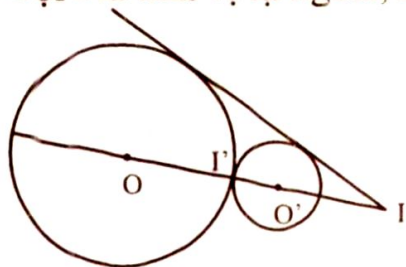
Vậy tâm vị tự ngoài là  $I(-4; -2)$  và tâm vị tự trong là  $I'(4; 2)$ .

**Ví dụ 4:** Xác định tâm vị tự trong và tâm vị tự ngoài của hai đường tròn trong các trường hợp sau:

- Hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau.
- Hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau.
- Một đường tròn chứa đường tròn kia.

### Giải

Gọi  $I$  là tâm vị tự ngoài,  $I'$  là tâm vị tự trong của hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$ .



- Nếu  $(O)$  và  $(O')$  tiếp xúc ngoài thì tiếp điểm  $I'$  là tâm vị tự trong, giao điểm của  $OO'$  với tiếp tuyến chung ngoài của  $(O)$  và  $(O')$  nếu có là tâm vị tự ngoài.
- Nếu  $(O)$  và  $(O')$  tiếp xúc trong thì tiếp điểm  $I$  là tâm vị tự ngoài, tâm vị tự trong  $I'$  là giao điểm của  $OO'$  và  $MM'$  trong đó  $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}$  là 2 vector bán kính ngược hướng của  $(O)$  và  $(O')$ .
- Nếu  $(O)$  chứa  $(O')$  thì xác định  $I$  và  $I'$  qua các cặp vector bán kính cùng hướng và ngược hướng. Đặc biệt, khi  $O$  trùng  $O'$  thì  $I$  và  $I'$  trùng  $O$ .



**Ví dụ 5:** Các khẳng định sau đây có đúng không?

- Phép vị tự luôn có điểm bất động (tức là điểm biến thành chính nó).
- Phép vị tự không thể có quá một điểm bất động.
- Nếu phép vị tự có hai điểm bất động phân biệt thì mọi điểm đều bất động.

**Giải**

- Đúng. Tâm vị tự là điểm bất động.
- Sai. Phép vị tự tỉ số  $k = 1$  có mọi điểm đều là điểm bất động.
- Đúng. Phép vị tự tâm  $O$  luôn có điểm bất động  $O$ , nếu nó còn điểm bất động nữa là  $M$  (tức là ảnh  $M'$  của  $M$  trùng với  $M$ ) thì vì  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$  nên  $k = 1$ . Vậy phép vị tự đó là phép đồng nhất nên mọi điểm đều bất động.

**Ví dụ 6:** Các phép sau đây có phải là phép vị tự hay không: phép đối xứng tâm, phép đối xứng trục, phép đồng nhất, phép tịnh tiến theo vectơ khác  $\vec{0}$ ?

**Giải**

- Phép đối xứng qua tâm  $O$  là phép vị tự tâm  $O$  tỉ số  $-1$ .
- Phép đối xứng trục không phải là phép vị tự vì các đường thẳng nối cặp điểm tương ứng không đồng quy.
- Phép đồng nhất là phép vị tự với tâm là điểm bất kì và tỉ số  $k = 1$ .
- Phép tịnh tiến theo vectơ khác  $\vec{0}$  không phải là phép vị tự vì không có điểm nào biến thành chính nó.

**Ví dụ 7:** Gọi  $F$  là phép biến hình có tính chất sau đây: Với mọi cặp điểm  $M, N$  và ảnh  $M', N'$  của chúng, ta luôn có  $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ , trong đó  $k$  là một số không đổi khác  $0$ . Hãy chứng minh rằng  $F$  là phép tịnh tiến hoặc phép vị tự.

**Giải**

Lấy một điểm  $A$  cố định và đặt  $A' = F(A)$ . Theo giả thiết, với điểm  $M$  bất kì và ảnh  $M' = F(M)$ , ta có:

$$\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$$

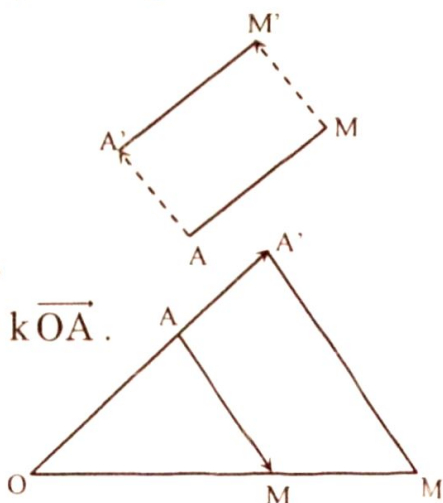
Nếu  $k = 1$ , thì  $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$   
nên  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$ : xác định.

Vậy  $F$  là phép tịnh tiến theo vectơ  $\overrightarrow{AA'}$ .

Nếu  $k \neq 1$  thì có điểm  $O$  sao cho  $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ .

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \overrightarrow{OM'} &= \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'M'} \\ &= k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{OM}\end{aligned}$$

Vậy  $F$  là phép vị tự tâm  $O$ , tỉ số  $k$ .





- Ví dụ 8:** Cho hai phép vị tự  $V_1$  có tâm  $O_1$  tỉ số  $k_1$  và  $V_2$  có tâm  $O_2$  tỉ số  $k_2$ .  
 Gọi  $F$  là hợp thành của  $V_1$  và  $V_2$ . Chứng minh rằng  
 a)  $F$  là một phép tịnh tiến nếu  $k_1.k_2 = 1$ . Hãy xác định vector tịnh tiến.  
 b)  $F$  là một phép vị tự nếu  $k_1.k_2 \neq 1$ . Hãy xác định tâm và tỉ số của phép vị tự đó.

**Giải**

Lấy một điểm  $M$  bất kì, nếu  $V_1$  biến  $M$  thành  $M_1$  và  $V_2$  biến  $M_1$  thành  $M_2$  thì  $\overrightarrow{O_1M_1} = k_1 \overrightarrow{O_1M}$  và  $\overrightarrow{O_2M_2} = k_2 \overrightarrow{O_2M_1}$

Khi đó, phép hợp thành  $F$  biến  $M$  thành  $M_2$ .

Gọi  $I$  là ảnh của  $O_1$  qua phép vị tự  $V_2$ , tức là:

$$\overrightarrow{O_2I} = k_2 \overrightarrow{O_2O_1}$$

Khi đó:  $\overrightarrow{IM_2} = k_2 \overrightarrow{O_1M_1} = k_1 k_2 \overrightarrow{O_1M}$

- a) Nếu  $k_1.k_2 = 1$  thì  $\overrightarrow{IM_2} = \overrightarrow{O_1M}$  nên

$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{O_1I} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2I} = (1 - k_2) \overrightarrow{O_1O_2} : \text{xác định. } O_1$$

Vậy trong trường hợp này  $F$  là phép tịnh tiến theo vector

$$\vec{u} = (1 - k_2) \overrightarrow{O_1O_2}$$

- b) Nếu  $k_1.k_2 \neq 1$  ta chọn điểm  $O_3$  sao cho:  $\overrightarrow{O_3I} = k_1 k_2 \overrightarrow{O_3O_1}$

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{O_3M_2} = \overrightarrow{O_3I} + \overrightarrow{IM_2} = k_1 k_2 \overrightarrow{O_3O_1} + k_1 k_2 \overrightarrow{O_1M} = k_1 k_2 \overrightarrow{O_3M}$$

Vậy  $F$  là phép vị tự tâm  $O_3$  tỉ số  $k_1 k_2$ .

Tâm  $O_3$  của phép vị tự đó được xác

định bởi đẳng thức

$$\overrightarrow{O_3I} = k_1 k_2 \overrightarrow{O_3O_1}$$

$$\text{hay } \overrightarrow{O_3O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2I} = k_1 k_2 \overrightarrow{O_3O_1}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{O_1O_2} + k_2 \overrightarrow{O_2O_1} = (1 - k_1 k_2) \overrightarrow{O_1O_3}$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{O_1O_3} = \frac{1 - k_2}{1 - k_1 k_2} \overrightarrow{O_1O_2}$$

Do đó tâm của ba phép vị tự  $V_1$ ,  $V_2$  và  $F$  là ba điểm thẳng hàng.

- Ví dụ 9:** Cho tam giác  $ABC$  với trọng tâm  $G$ , trực tâm  $H$  và tâm đường tròn ngoại tiếp  $O$ . Chứng minh  $\overrightarrow{GH} = -2 \overrightarrow{GO}$  và ba điểm  $G$ ,  $H$ ,  $O$  cùng nằm trên một đường thẳng (gọi là đường thẳng  $O$ -le).

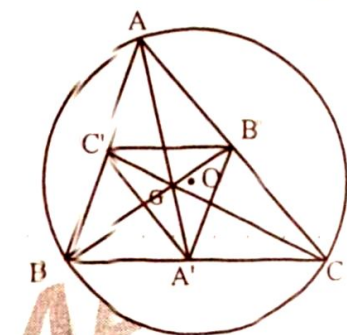
**Giải**

Ta có  $OA' \perp BC$  mà  $BC \parallel B'C'$  nên  $OA' \perp B'C'$ .

Tương tự  $OB' \perp A'C'$ . Vậy  $O$  là trực tâm của tam giác  $A'B'C'$ .

Vì  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  nên

$$\overrightarrow{GA} = -2 \overrightarrow{GA'}, \overrightarrow{GB} = -2 \overrightarrow{GB'}, \overrightarrow{GC} = -2 \overrightarrow{GC'}.$$





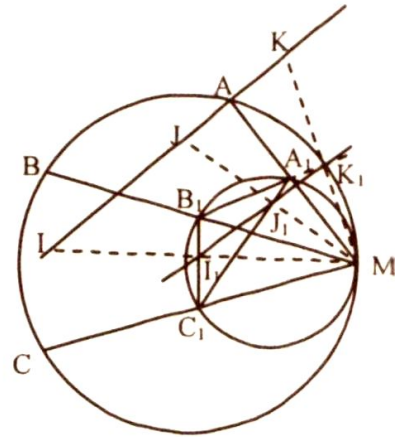
Do đó phép vị tự  $V$  tâm  $G$ , tỉ số  $-2$  biến tam giác  $A'B'C'$  thành tam giác  $ABC$ . Điểm  $O$  là trực tâm của tam giác  $A'B'C'$  nên phép vị tự  $V$  biến  $O$  thành trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .

Do đó  $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$  nên ba điểm  $G, H, O$  thẳng hàng.

**Ví dụ 10:** Gọi  $MA, MB, MC$  là 3 dây cung của đường tròn tâm  $O$ . Chứng minh rằng các giao điểm khác với  $M$  của 3 đường tròn đường kính  $MA, MB$  và  $MC$  lấy từng đôi một là 3 điểm thẳng hàng.

### Giải

Gọi  $A_1, B_1$  và  $C_1$  lần lượt là trung điểm của  $MA, MB$  và  $MC$ ;  $I, J, K$  lần lượt là giao điểm thứ hai của các cặp đường tròn đường kính  $MB, MC$ , đường tròn đường kính  $MC, MA$  và đường tròn đường kính  $MA, MB$ .



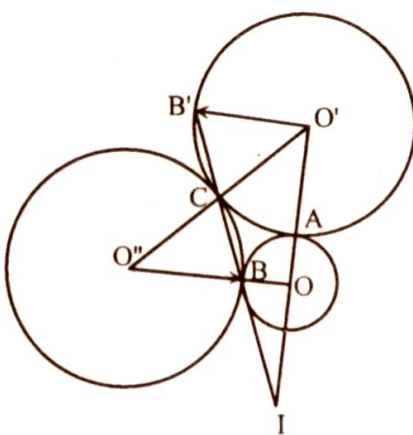
Ta có  $I, J, K$  là điểm đối xứng của  $M$

qua  $B_1C_1, C_1A_1$  và  $A_1B_1$ . Phép vị tự tâm  $M$  tỉ số  $2$  biến các hình chiếu  $I, J, K$  của  $M$  lên các cạnh của tam giác  $A_1B_1C_1$  thành  $I_1, J_1, K_1$ .

Từ các tứ giác nội tiếp được thì góc  $\widehat{K_1I_1M} = \widehat{J_1I_1M}$  nên  $I_1, J_1, K_1$  thẳng hàng do đó  $I, J, K$  thẳng hàng.

**Ví dụ 11:** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  có bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài với nhau tại  $A$ . Một đường tròn  $(O'')$  thay đổi, luôn luôn tiếp xúc ngoài với  $(O)$  và  $(O')$  lần lượt tại  $B$  và  $C$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $BC$  luôn đi qua một điểm cố định.

### Giải



Kéo dài  $BC$  cắt  $(O')$  tại  $B'$ . Vì  $C$  là tâm vị tự trong của  $(O)$  nên hai vector  $\overrightarrow{O'B'}$  và  $\overrightarrow{O''B}$  ngược hướng.

Vì  $B$  là tâm vị tự trong của  $(O)$  và  $(O'')$  nên hai vector  $\overrightarrow{O''B}$  và  $\overrightarrow{OB}$  ngược hướng. Do đó hai vector  $\overrightarrow{OB}$  và  $\overrightarrow{O'B'}$  cùng hướng.

Vậy đường thẳng  $BB'$ , cũng chính là đường thẳng  $BC$ , luôn luôn đi qua điểm cố định là tâm vị tự ngoài  $I$  của  $(O)$  và  $(O')$ .

**Ví dụ 12:** Cho đường thẳng  $d$  và đường tròn  $(O)$ . Một đường tròn lưu động tiếp xúc với  $(O)$  và  $d$  tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh rằng  $MN$  đi qua một điểm cố định.

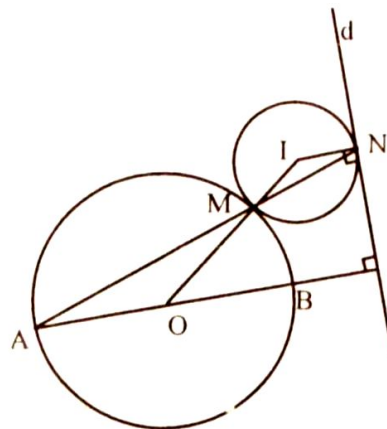


### Giải

Gọi  $I$  là tâm đường tròn tiếp xúc ngoài với  $(O)$  và  $d$ , và  $AB$  là đường kính của đường tròn  $(O)$  vuông góc với  $d$ .

Hai đường tròn  $(O)$  và  $(I)$  tiếp xúc ngoài tại  $M$  nên  $M$  là tâm vị tự trong của hai đường tròn.

Ta có  $\overrightarrow{IN}$  và  $\overrightarrow{OA}$  là hai vector bán kính của  $(I)$  và  $(O)$  ngược hướng nên  $I$  và  $A$  tương ứng của phép vị tự trong có tâm  $M$ . Do đó  $NA$  qua  $M$ . Vậy  $MN$  qua điểm cố định  $A$ .



**Ví dụ 13:** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  tiếp xúc ngoài với nhau tại  $A$ . Một góc vuông  $xAy$  quay quanh  $A$ , tia  $Ax$  cắt  $(O)$  tại  $M$  còn tia  $Ay$  cắt  $(O')$  tại  $M'$ .

- Chứng minh đường thẳng  $MM'$  luôn đi qua một điểm cố định.
- Đường thẳng  $MM'$  cắt  $(O)$  tại  $N$  và cắt  $(O')$  tại  $N'$ . Chứng minh  $\widehat{NAN'} = 90^\circ$ .
- Chứng minh các tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $M, N$ , các tiếp tuyến của  $(O')$  tại  $M', N'$  cắt nhau tạo thành một hình bình hành.

### Giải

- Gọi  $A'$  là giao điểm thứ hai của  $OO'$  và đường tròn  $(O')$ . Ta có  $\overrightarrow{A'M'}$  và  $\overrightarrow{AM}$  có cùng hướng suy ra  $\overrightarrow{OM}$  và  $\overrightarrow{O'M'}$  cùng hướng. Vậy đường thẳng  $MM'$  luôn đi qua tâm vị tự ngoài  $S$  của  $(O)$  và  $(O')$ .
- Vì  $S$  là tâm vị tự ngoài của  $(O)$  và  $(O')$  nên  $\overrightarrow{ON}$  và  $\overrightarrow{O'N'}$  cùng hướng. Suy ra  $AN \parallel A'N'$ , mà  $AN' \perp A'N'$  nên  $AN' \perp AN$  hay  $\widehat{NAN'} = 90^\circ$ .
- Qua phép vị tự tâm  $S$ , tiếp tuyến tại  $M$  của  $(O)$  biến thành tiếp tuyến tại  $M'$  của  $(O')$ , nên hai tiếp tuyến đó song song. Cũng tương tự, tiếp tuyến tại  $N$  của  $(O)$  và tiếp tuyến tại  $N'$  của  $(O')$  cũng song song. Vậy bốn tiếp tuyến đó tạo thành một hình bình hành.

**Ví dụ 14:** Cho đường tròn  $(O; R)$  và điểm  $A$  cố định. Một dây cung  $BC$  thay đổi của  $(O; R)$  có độ dài không đổi  $BC = m$ . Tìm quỹ tích trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .

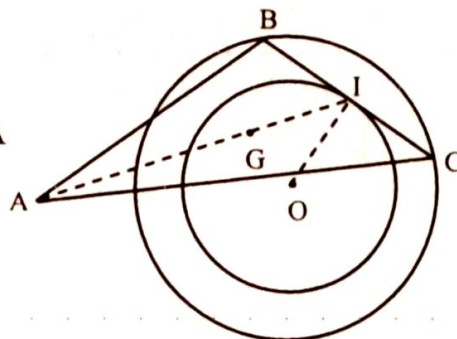
### Giải

Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ .

Ta có  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AI}$  nên phép vị tự  $V$  tâm  $A$

tỉ số  $\frac{2}{3}$  biến điểm  $I$  thành điểm  $G$ .

Trong tam giác vuông  $OIB$  ta có:





$OI = \sqrt{OB^2 - IB^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} = R'$  (không đổi) nên quỹ tích I là đường tròn (O; R') với  $m \leq 2R$ .

Vậy quỹ tích G là ảnh của quỹ tích I qua phép vị tự V.

**Ví dụ 15:** Tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định còn đỉnh A chạy trên một đường tròn (O; R) cố định không có điểm chung với đường thẳng BC. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

**Giải**

Gọi I là trung điểm của BC thì I cố định.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên  $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{IA}$ .

Do đó phép vị tự V tâm I tỉ số  $\frac{1}{3}$  biến điểm

A thành điểm G. Từ đó suy ra khi A chạy trên đường tròn (O; R) thì quỹ tích G là ảnh của đường tròn đó qua phép vị tự V,

tức là đường tròn (O'; R') mà  $\overrightarrow{IO'} = \frac{1}{3} \overrightarrow{IO}$  và  $R' = \frac{1}{3} R$ .

**Ví dụ 16:** Cho đường tròn (O; R) và điểm I cố định khác O. Một điểm M thay đổi trên đường tròn. Tia phân giác của góc MOI cắt IM tại N. Tìm quỹ tích điểm N.

**Giải**

Đặt  $IO = d$ . Theo tính chất đường phân giác

ta có  $\frac{IN}{NM} = \frac{IO}{OM} = \frac{d}{R}$

$\Rightarrow \frac{IN}{IN + NM} = \frac{d}{d + R} \Rightarrow \frac{IN}{IM} = \frac{d}{d + R}$

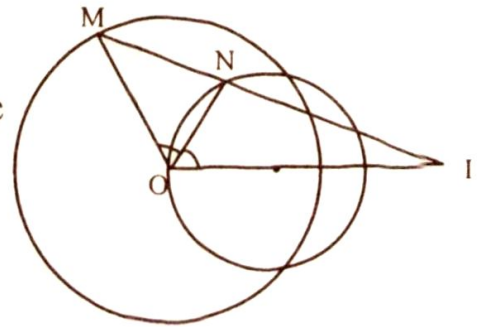
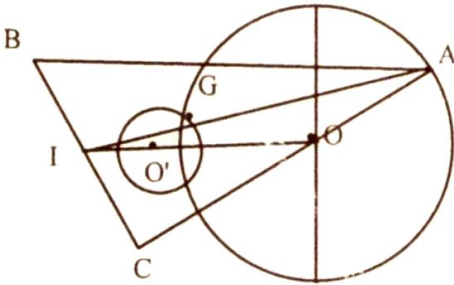
Vì hai vectơ  $\overrightarrow{IN}$  và  $\overrightarrow{IM}$  cùng hướng nên  $\overrightarrow{IN} = \frac{d}{d + R} \overrightarrow{IM}$ .

Do đó phép vị tự V tâm I tỉ số  $k = \frac{d}{d + R}$  biến điểm M thành điểm N.

Khi M ở vị trí  $M_0$  trên đường tròn (O; R) sao cho  $\widehat{IOM_0} = 0^\circ$  thì tia phân giác của góc  $\widehat{IOM_0}$  không cắt IM. Điểm N không tồn tại.

Vậy khi M chạy trên (O; R) (M khác  $M_0$ ) thì quỹ tích điểm N là ảnh của (O; R) qua phép vị tự V bỏ đi ảnh của điểm  $M_0$ .

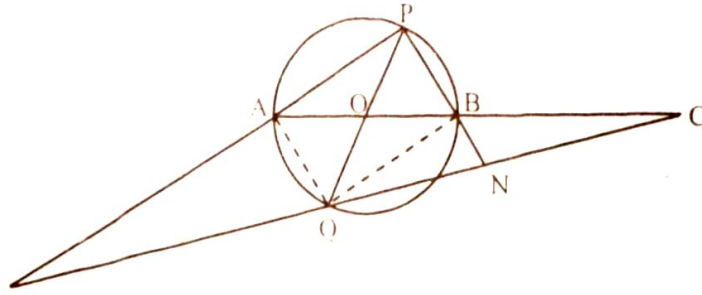
**Ví dụ 17:** Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Gọi C là điểm đối xứng với A qua B và PQ là đường kính thay đổi của (O) khác đường kính AB. Đường thẳng CQ cắt PA và PB lần lượt tại M và N. Tìm quỹ tích các điểm M và N khi đường kính PQ thay đổi.





### Giải

Ta có  $QB \parallel AP$  (vì cùng vuông góc với  $PB$ ) và  $B$  là trung điểm của  $AC$  nên  $Q$  là trung điểm của  $CM$ . Tương tự ta có  $AQ \parallel BN$  (vì cùng vuông góc với  $AP$ ) và  $B$  là trung điểm của  $AC$  nên  $N$  là trung điểm của  $CQ$ .



Ta có  $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CQ}$  nên phép vị tự  $V$  tâm  $C$  tỉ số 2 biến  $Q$  thành  $M$ . Vì  $Q$  chạy trên đường tròn  $(O)$  trừ hai điểm  $A, B$  nên quỹ tích  $M$  là ảnh của đường tròn đó qua phép vị tự  $V$  trừ 2 ảnh của  $A, B$ .

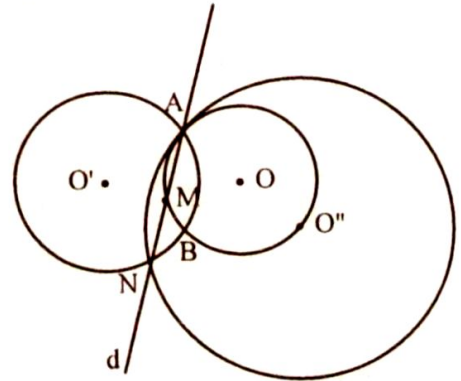
Tương tự  $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CQ}$  nên quỹ tích  $N$  là ảnh của đường tròn  $(O)$  qua phép vị tự  $V'$  tâm  $C$ , tỉ số  $\frac{1}{2}$  trừ 2 ảnh của  $A, B$ .

**Ví dụ 18:** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Hãy dựng qua  $A$  một đường thẳng  $d$  cắt  $(O)$  ở  $M$  và cắt  $(O')$  ở  $N$  sao cho  $M$  là trung điểm của  $AN$ .

### Giải

Giả sử đã dựng được đường thẳng  $d$  theo yêu cầu của bài toán. Vì  $M$  là trung điểm của  $AN$  nên  $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AM}$ . Do đó phép vị tự  $V$  tâm  $A$  tỉ số 2 biến  $M$  thành  $N$ , biến  $(O)$  thành  $(O'')$  thì  $(O'')$  phải đi qua  $N$ .

Vậy  $N$  là giao điểm của hai đường tròn  $(O')$  và  $(O'')$ .

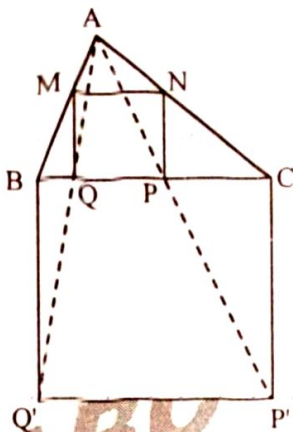


**Ví dụ 19:** Cho tam giác nhọn  $ABC$ , hãy dựng hình vuông  $MNPQ$  sao cho hai đỉnh  $P, Q$  nằm trên cạnh  $BC$  và hai đỉnh  $M, N$  lần lượt nằm trên hai cạnh  $AB$  và  $AC$ .

### Giải

Giả sử ta đã dựng hình vuông  $MNPQ$  thì phép vị tự tâm  $A$ , tỉ số  $\frac{BC}{MN}$  biến hình vuông  $MNPQ$  thành hình vuông  $BCP'Q'$ . Suy ra cách dựng:

Dựng hình vuông  $BCP'Q'$  nằm ngoài tam giác  $ABC$ . Lấy giao điểm  $P, Q$  của  $BC$  với các đoạn thẳng tương ứng  $AP'$  và  $AQ'$ . Từ  $P$  và  $Q$ , vẽ các đường thẳng vuông góc với  $BC$ , lần lượt cắt  $AC$  và  $AB$  tại  $N$  và  $M$ . Khi đó  $MNPQ$  chính là hình vuông cần dựng.





**Ví dụ 20:** Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính khác nhau tiếp xúc ngoài với nhau và một điểm M trên (O). Dựng một đường tròn đi qua M và tiếp xúc với cả hai đường tròn (O) và (O').

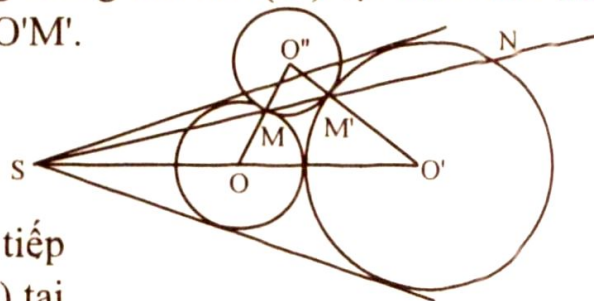
**Giải**

Gọi S là tâm vị tự ngoài của (O) và (O'). Gọi N là ảnh của M qua phép vị tự tâm S biến (O) thành (O'). Đường thẳng SN cắt (O') tại điểm thứ hai M'. Gọi O'' là giao điểm của OM và O'M'.

$$\text{Ta có } OM \parallel O'N \Rightarrow \frac{O''M}{O'N} = \frac{O''M'}{M'O'}$$

vì  $O'N = O'M'$  nên  $O''M = O''M'$ .

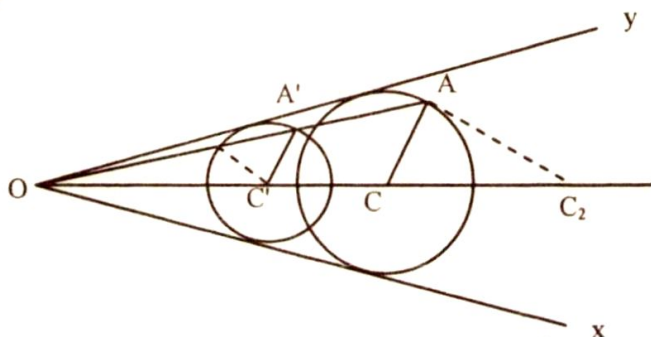
Vậy đường tròn O'' bán kính O''M tiếp xúc với (O) tại M và tiếp xúc với (O') tại M' là đường tròn cần dựng.



**Ví dụ 21:** Dựng một đường tròn (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Ox, Oy cho sẵn và đi qua một điểm cố định A cho sẵn ở trong góc xOy.

**Giải**

Phân tích, giả sử dựng được đường tròn (C) đi qua A và tiếp xúc với Ox, Oy, phép vị tự tâm O biến (C) thành (C') chỉ thỏa 2 điều kiện tiếp xúc với Ox, Oy.



Cách dựng:

- Dựng đường tròn (C') tùy ý tiếp xúc với Ox và Oy.
- Dựng OA cắt (C') tại A'.
- Dựng giao điểm A của đường thẳng OA' với đường thẳng qua C, song song C'A'.
- Đường tròn tâm C, bán kính CA là đường tròn phải dựng.

Chứng minh: Đường tròn tâm C, bán kính CA đi qua A là ảnh của đường tròn (C') trong phép vị tự nên tiếp xúc với Ox, Oy, tâm O tỉ số  $k = \frac{CA}{C'A'}$

Biện luận: Đường thẳng OA cắt (C') tại 2 điểm A', A' nên bài toán có 2 nghiệm hình.



## DẠNG 2: PHÉP ĐỒNG DẠNG

– Phép đồng dạng tỉ số  $k$  ( $k > 0$ ) là phép biến hình biến mỗi cặp điểm  $M, N$  thành cặp điểm  $M', N'$  sao cho  $M'N' = kMN$ .

– Mỗi phép đồng dạng bao giờ cũng có thể xem là hợp thành của một phép vị tự và một phép dời hình.

– Hai hình được gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

**Chú ý:** Để chứng minh 2 hình  $(H_1)$  và  $(H'_1)$  đồng dạng, ta sử dụng phép vị tự để biến hình  $(H_1)$  thành  $(H_2)$  bằng  $(H'_1)$  rồi sử dụng phép dời hình biến  $(H_2)$  thành  $(H'_1)$ .

**Ví dụ 1:** Trong mặt phẳng Oxy xét phép biến hình  $F$  biến mỗi điểm  $M(x; y)$  thành  $M'(3x + 1; -3y + 5)$ . Chứng minh  $F$  là một phép đồng dạng.

**Giải**

Phép  $F$  biến  $A(x_1; y_1)$  thành  $A'(3x_1 + 1; -3y_1 + 5)$

$B(x_2; y_2)$  thành  $B'(3x_2 + 1; -3y_2 + 5)$

Ta có  $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  và

$$\begin{aligned} A'B' &= \sqrt{(3x_1 - 3x_2)^2 + (-3y_1 + 3y_2)^2} \\ &= 3\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 3.AB \end{aligned}$$

Vậy  $F$  là phép đồng dạng tỉ  $k = 3$ .

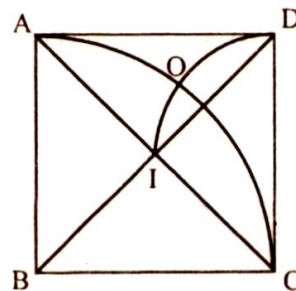
**Ví dụ 2:** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $I$  có các đỉnh  $A, B, C, D$  quay theo chiều dương. Xác định phép đồng dạng biến  $\overline{AI}$  thành  $\overline{CD}$ .

**Giải**

$$\text{Tỉ số đồng dạng là } k = \frac{CD}{AI} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

Gọi  $O$  là giao điểm 2 cung chứa góc

$\frac{3\pi}{4}$  dựng trên dây  $AC$  và  $ID$ .



Hợp thành của phép quay tâm  $O$ , góc quay  $\frac{3\pi}{4}$  và phép vị tự tâm  $O$  tỉ

$k = \sqrt{2}$  biến  $A$  thành  $C$ ,  $I$  thành  $D$  nên chính là phép đồng dạng cần tìm biến  $\overline{AI}$  thành  $\overline{CD}$ .

**Ví dụ 3:** Cho hai đường tròn cố định  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  với  $R \neq R'$ . Hai điểm  $M$  và  $M'$  lần lượt lưu động trên hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  sao cho  $(\overline{OM}, \overline{O'M'}) = 60^\circ$ . Xác định phép đồng dạng biến  $M$  thành  $M'$ .

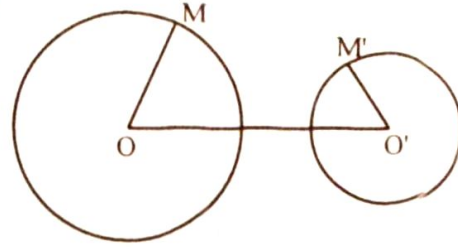


### Giải

Ta có  $\frac{O'M'}{OM} = \frac{R'}{R}$ ,  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = 60^\circ$

Gọi A và B là 2 tâm vị tự của 2 đường tròn (O) và (O') thì A, B chia

OO' theo tỉ  $\pm \frac{R'}{R}$ .



Gọi I là giao điểm của đường tròn đường kính AB với cung chứa góc  $60^\circ$  dựng trên dây OO'. Hợp thành của phép quay tâm I, góc  $60^\circ$  và phép vị

tự tâm I, tỉ  $k = \frac{R'}{R}$  biến  $\overrightarrow{OM}$  thành  $\overrightarrow{O'M'}$  nên biến M thành M'. Đó là

phép đồng dạng cần tìm.

**Ví dụ 4:** Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ . Hãy viết phương trình đường tròn (C'') là ảnh của (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số  $k = -2$  và phép đối xứng qua trục Oy.

### Giải

Đường tròn (C) tâm I(1; 2) bán kính  $R = 3$ . Qua phép vị tự tâm O, tỉ số  $k = -2$  biến I(1; 2) thành I'(-2; -4) biến R thành  $R' = |k| R = 6$ . Phép đối xứng qua trục Oy biến I'(-2; -4) thành I''(2; -4),  $R'' = R' = 6$  nên phương trình (C''):  $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 36$ .

**Ví dụ 4:** Chứng minh phép đồng dạng biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng, đồng thời bảo toàn thứ tự các điểm.

### Giải

Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó, ta có  $AB + BC = AC$  (1).

Phép đồng dạng F biến A thành A', B thành B', C thành C' thì

$$A'B' = kAB, B'C' = kBC, A'C' = kAC.$$

Từ (1)  $\Rightarrow kAB + kBC = kAC \Rightarrow A'B' + B'C' = A'C'$ .

Vậy A', B', C' thẳng hàng theo thứ tự.

**Ví dụ 5:** Chứng minh nếu phép đồng dạng F biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt biến thành trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C'.

### Giải

– Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng BC thì phép đồng dạng F biến điểm D thành trung điểm D' của đoạn thẳng B'C' và vì thế trung tuyến AD của tam giác ABC biến thành trung tuyến A'D' của tam giác A'B'C'. Đối với hai trung tuyến còn lại cũng thế. Vì trọng tâm tam giác là giao điểm của các đường trung tuyến nên trọng tâm tam giác ABC biến thành trọng tâm tam giác A'B'C'.



– Gọi  $AH$  là đường cao của tam giác  $ABC$  ( $H \in BC$ ). Khi đó phép đồng dạng  $F$  biến đường thẳng  $AH$  thành đường thẳng  $A'H'$ . Vì  $AH \perp BC$  nên  $A'H' \perp B'C'$ , nói cách khác  $A'H'$  là đường cao của tam giác  $A'B'C'$ . Đối với các đường cao khác cũng thế. Vì trực tâm của tam giác là giao điểm của các đường cao nên trực tâm tam giác  $ABC$  biến thành trực tâm tam giác  $A'B'C'$ .

– Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  thì  $OA = OB = OC$  nên nếu điểm  $O$  biến thành điểm  $O'$  thì  $O'A' = O'B' = O'C' = kOA = kOB = kOC$ , do đó  $O'$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $A'B'C'$ .

**Ví dụ 6:** Chứng minh rằng hai hình vuông bất kì đều đồng dạng với nhau.

**Giải**

Cho 2 hình vuông  $ABCD$  và  $A'B'C'D'$ . Phép vị tự  $V$  tâm  $A$  tỉ số  $k = \frac{A'B'}{AB}$  biến hình vuông  $ABCD$  thành hình vuông  $AB_1C_1D_1$ , có cạnh

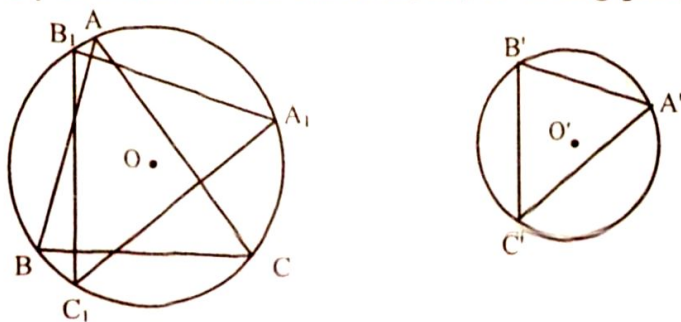
$AB_1 = kAB = A'B'$ . Do đó 2 hình vuông  $AB_1C_1D_1$  và  $A'B'C'D'$  bằng nhau nên có phép dời hình  $F$  biến hình vuông  $AB_1C_1D_1$  thành  $A'B'C'D'$ .

Hợp thành của  $V$  và  $F$  là phép đồng dạng nên hai hình vuông  $ABCD$  và  $A'B'C'D'$  đồng dạng.

**Ví dụ 7:** Cho hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  có  $AB \perp A'B'$ ,  $BC \perp B'C'$ ,  $CA \perp C'A'$ . Chứng minh rằng hai tam giác đó đồng dạng.

**Giải**

Gọi  $(O)$  và  $(O')$  là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$ . Ta có một phép vị tự biến đường tròn  $(O')$  thành đường tròn  $(O)$ . Kí hiệu  $A_1, B_1, C_1$  là ảnh của các đỉnh  $A', B', C'$  trong phép vị tự đó.



Vì:  $A_1B_1 \parallel A'B'$ ,  $B_1C_1 \parallel B'C'$ ,  $C_1A_1 \parallel C'A'$  nên  $A_1B_1 \perp AB$ ,  $B_1C_1 \perp BC$ ,  $C_1A_1 \perp CA$ . Thực hiện phép quay tâm  $(O)$  góc quay  $90^\circ$  biến tam giác  $A_1B_1C_1$  thành tam giác  $A_2B_2C_2$ . Tam giác  $A_2B_2C_2$  có 3 cạnh song song với tam giác  $ABC$  và cùng nội tiếp trong một đường tròn  $(O)$ , do đó các đỉnh của  $A_2B_2C_2$  trùng với đỉnh của tam giác  $ABC$ . Điều đó chứng tỏ rằng tồn tại một phép đồng dạng là hợp thành của một phép vị tự với một phép quay biến tam giác  $A'B'C'$  thành tam giác  $ABC$  nên 2 tam giác đó đồng dạng.



**Ví dụ 8:** Chứng tỏ rằng các đa giác đều có cùng số cạnh thì đồng dạng với nhau.

**Giải**

Cho hai  $n$ -giác đều  $A_1A_2...A_n$  và  $B_1B_2...B_n$  có tâm lần lượt là điểm  $O$  và điểm  $O'$ .

Đặt  $k = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{O'B_1}{OA_1}$ . Gọi  $V$  là phép vị tự tâm  $O$ , tỉ số  $k$  và  $C_1C_2...C_n$  là ảnh của đa giác  $A_1A_2...A_n$  qua phép vị tự  $V$ . Ta có  $C_1C_2...C_n$  cũng là đa giác đều và vì  $\frac{C_1C_2}{A_1A_2} = k$  nên  $C_1C_2 = B_1B_2$ . Do đó hai  $n$ -giác đều  $C_1C_2$  và

$B_2B_2...B_n$  có cạnh bằng nhau nên có phép dời hình  $D$  biến  $C_1C_2...C_n$  thành  $B_1B_2...B_n$ . Nếu gọi  $F$  là phép hợp thành của  $V$  và  $D$  thì  $F$  là phép đồng dạng biến  $A_1A_2...A_n$  thành  $B_1B_2...B_n$ . Vậy hai đa giác đều đó đồng dạng với nhau.

**Ví dụ 9:** Tìm điều kiện để hai hình chữ nhật đồng dạng với nhau

**Giải**

Đường chéo hình chữ nhật chia hình chữ nhật thành 2 tam giác vuông, ta đưa về điều kiện 2 tam giác vuông đồng dạng.

Nếu hình chữ nhật  $(H)$  có chiều rộng  $a$ , chiều dài  $b$  và hình chữ nhật  $(H')$  có chiều rộng  $a'$ , chiều dài  $b'$ , điều kiện cần và đủ để  $(H)$  đồng dạng với

$(H')$  là:  $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ .

**Ví dụ 10:** Cho hai đường thẳng song song  $d$  và  $d'$  và điểm cố định  $S$  ở ngoài dài  $(d, d')$ . Một cát tuyến lưu động qua  $S$  cắt  $d$  tại  $M$  và  $d'$  tại  $M'$ . Chứng minh rằng các tiếp điểm  $T$  và  $T'$  của các tiếp tuyến vẽ từ  $S$  đến đường tròn đường kính  $MM'$  ở trên những đường thẳng cố định.

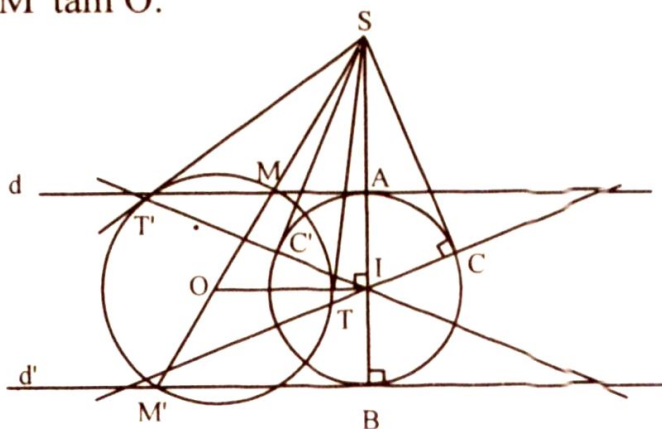
**Giải**

Vẽ cát tuyến qua  $S$  và vuông góc với  $d$  tại  $A$  và  $d'$  tại  $B$ .

Dựng tiếp tuyến  $SC$  với đường tròn đường kính  $AB$  tâm  $I$  và tiếp tuyến  $ST$  với đường tròn đường kính  $MM'$  tâm  $O$ .

Ta có:  $\frac{SO}{OM} = \frac{SI}{IA} \Rightarrow \frac{SO}{SI} = \frac{OM}{IA}$

Do đó đường tròn  $(O)$  là ảnh của đường tròn  $(I)$  qua phép đồng dạng có tâm là  $S$ . Trong phép đồng dạng này các điểm  $T$  và  $T'$  là điểm tương ứng của các tiếp điểm  $C$  và  $C'$  của đường tròn  $(I)$ .





Do đó các tam giác SIO, SCT và SCT' đồng dạng và vì  $\widehat{SIO} = 90^\circ$  nên:  
 $\widehat{SCT} = \widehat{SCT'} = 90^\circ$ .

Vậy T và T' ở trên các đường thẳng IC và IC' cố định.

**Ví dụ 11:** Cho một đường tròn (O), một đường thẳng d và một điểm P cố định. Với mỗi điểm M thuộc đường tròn (O) ta xác định điểm N đối xứng với M qua d. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng PN. Tìm tập hợp điểm I, khi M thay đổi trên đường tròn.

**Giải**

Từ điều kiện bài toán ta suy ra tập hợp N là một đường tròn (O') ảnh của (O) trong phép đối xứng trục d.

Mặt khác, ta có  $\overline{PI} = \frac{1}{2} \overline{PN}$ , nên I là ảnh của N trong phép vị tự tâm P, tỉ

$$k = \frac{1}{2}.$$

Tập hợp các điểm I là một đường tròn (O'') và ảnh của (O') trong phép vị tự  $V_{(P, \frac{1}{2})}$ . Vậy tập hợp các điểm I là một đường tròn ảnh của (O) qua

phép đồng dạng là hợp thành của 2 phép  $D_d$  và  $V_{(P, \frac{1}{2})}$ .

**Ví dụ 12:** Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau và điểm C. Tìm trên hai đường thẳng a và b các điểm A và B tương ứng sao cho tam giác ABC vuông cân ở A.

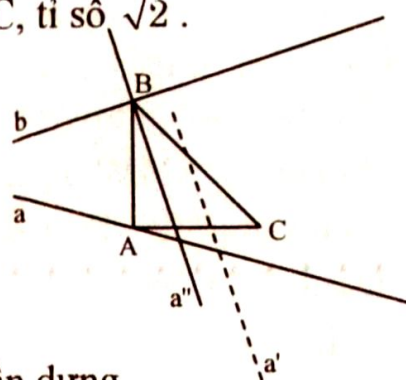
**Giải**

Ta có thấy góc lượng giác  $(CA; CB) = -45^\circ$  và  $\frac{CB}{CA} = \sqrt{2}$ . Do đó B là ảnh của A qua phép đồng dạng F có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm C, góc  $-45^\circ$  và phép vị tự tâm C, tỉ số  $\sqrt{2}$ .

Cách dựng:

- Phép  $Q_{(C, -45^\circ)}$  biến a thành a'.
- Phép  $V_{(C, \sqrt{2})}$  biến a' thành a'',
- B là giao điểm của a'' và b,
- A là giao điểm của a và trung trực của BC.

Tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A cần dựng.



**Ví dụ 13:** Dựng tam giác ABC nếu biết hai góc  $\hat{B} = \beta$ ,  $\hat{C} = \gamma$  và một trong các yếu tố sau:

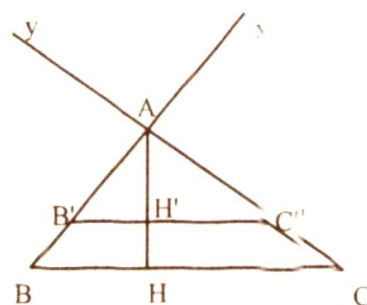
a) Đường cao AH = h.

b) Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp



### Giải

- a) Dựng đoạn thẳng  $B'C'$  tùy ý. Trên một nửa mặt phẳng có bờ  $B'C'$  dựng tia  $B'x$  và  $C'y$  sao cho  $\widehat{x B' C'} = \beta$  và  $\widehat{y C' B'} = \gamma$ . Hai tia đó cắt nhau tại  $A$  và ta có tam giác  $AB'C'$ .



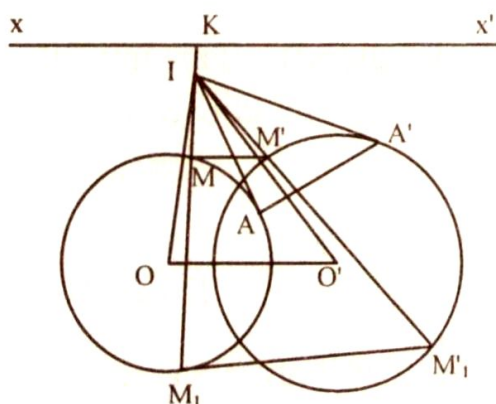
Dựng đường cao  $AH'$  của tam giác  $AB'C'$ . Nếu  $AH' = h$  thì  $AB'C'$  là tam giác cân dựng.

Nếu  $AH' \neq h$  thì trên tia  $AH'$ , ta lấy điểm  $H$  sao cho  $AH = h$  rồi dựng đường thẳng  $a$  vuông góc với  $AH$  tại  $H$ , cắt  $AB'$  tại  $B$  và cắt  $AC'$  tại  $C$ . Tam giác cân dựng là  $ABC$ .

- b) Dựng tam giác  $AB'C'$  như câu a) rồi dựng tâm  $O'$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AB'C'$ . Trên tia  $AO'$  lấy điểm  $O$  sao cho  $AO = R$  rồi dựng đường tròn  $(O)$  đi qua  $A$  (tức là có bán kính bằng  $R$ ). Hai tia  $AB'$  và  $AC'$  lần lượt cắt  $(O)$  tại các điểm  $B$  và  $C$  (khác  $A$ ). Tam giác  $ABC$  là tam giác cân dựng.

**Ví dụ 14:** Cho hai đường tròn  $(O; R)$ ,  $(O'; R')$ , hai điểm  $A$  trên  $(O)$  và điểm  $A'$  trên  $(O')$ , một đường thẳng  $xx'$ . Dựng đoạn thẳng  $MM'$  song song với  $xx'$  sao cho  $M$  nằm trên  $(O)$ ;  $M'$  nằm trên  $(O')$  đồng thời các tam giác  $OAM$ ,  $O'A'M'$  đồng dạng và cùng hướng.

### Giải



Phân tích : Giả sử đã dựng được hai điểm  $M$ ,  $M'$  thỏa mãn điều kiện của đầu bài. Lấy điểm  $I$  sao cho  $\triangle IOO' \sim \triangle IAA'$  và cùng hướng.

Đặt  $\alpha = \widehat{OIO'}$ .

Gọi  $F$  là hợp thành của phép vị tự tâm  $I$ , tỉ số  $k = \frac{R'}{R}$  và phép quay tâm  $I$ , góc  $\alpha$  thì  $F$  biến  $A$  thành  $A'$ ,  $O$  thành  $O'$ .

Giả sử ảnh của  $M$  trong  $F$  là  $M''$ , ta có  $M'' \in (O')$ .

Do  $F$  biến  $A$  thành  $A'$ ,  $O$  thành  $O'$ ,  $M$  thành  $M''$  nên ta có  $\triangle OAM \sim \triangle O'A'M''$  và cùng hướng. Suy ra  $M'' \equiv M'$  hay  $\triangle IMM' \sim \triangle IOO'$  và cùng hướng. Do vậy hai góc  $\widehat{IMM'}$ ,  $\widehat{IOO'}$  bằng nhau và cùng hướng.

Cách dựng: Từ  $I$  vẽ đường thẳng cắt  $(O)$  tại các điểm  $M$ ,  $M'$  và cắt đường thẳng  $xx'$  tại điểm  $K$  sao cho hai góc  $\widehat{IKx}$  và  $\widehat{IOO'}$  bằng nhau và cùng hướng. Từ  $I$  vẽ tia  $IM'$  cắt đường tròn  $(O')$  tại  $M'$  và  $M_1$  sao cho hai góc  $\widehat{MIM'}$ ,  $\widehat{OIO'}$  bằng nhau và cùng hướng.

Chứng minh: do  $M \in (O)$ ,  $M' \in (O')$ ,  $\widehat{MIM'} = \widehat{OIO'}$  và  $F: (O) \Rightarrow (O')$  nên  $F$  biến  $M$  thành  $M'$ .



Suy ra  $\triangle IMM' \sim \triangle IOO'$  và ta có  $\widehat{IMM'} = \widehat{IOO'} = \widehat{IKx}$ . Mà  $IMM'$ ,  $IKx$  cùng hướng với  $IOO'$ , suy ra  $MM' \parallel xx'$  (đối với  $M_1$ ,  $M'_1$  cũng chứng minh tương tự).

Biệt luận: Số nghiệm tùy theo số giao điểm của đường thẳng  $IK$  với đường tròn  $(O)$ .

### C. BÀI LIỆN TẬP

1. Chứng minh phép dời hình cũng là một phép đồng dạng.  
**ĐS:** phép đồng dạng tỉ số  $k = 1$
2. Cho tam giác  $ABC$  có 3 trung điểm của 3 cạnh là  $M, N, P$ . Chứng minh 2 tam giác  $ABC, MNP$  đồng dạng.  
**ĐS:** phép đồng dạng tỉ số  $k = \frac{1}{2}$
3. Chứng minh 2 tam giác vuông cân thì đồng dạng.  
**HD:** hợp thành của phép vị tự và phép quay.
4. Chứng minh 2 ngũ giác đều bất kỳ thì đồng dạng.
5. Cho đường tròn  $(O)$ , lấy điểm  $A$  cố định và điểm  $M$  lưu động trên  $(O)$ . Tìm quỹ tích đỉnh thứ 3 của tam giác  $AMN$  vuông cân tại  $M$ .  
**HD:** hợp thành của phép vị tự và phép quay tâm  $A$ .
6. Cho tam giác  $ABC$  trọng tâm  $G$ . Tìm ảnh của tam giác  $ABC$  qua phép vị tự  $V_{(A;2)}, V_{(G;-\frac{1}{2})}$ .  
**HD:** dùng định nghĩa của phép vị tự
7. Cho điểm  $A$  nằm ngoài đường thẳng  $d$  và đường tròn  $(O)$ . Vẽ ảnh của  $d, (O)$  qua  $V_{(A;3)}$ .
8. Cho 2 đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; 2R)$ . Tìm các phép vị tự biến  $(O)$  thành  $(O')$ .  
**HD:** xét các vị trí tương đối của 2 đường tròn
9. Cho hình thang  $ABCD, AB \parallel CD$ . Tìm phép vị tự:
  - a) Biến  $\overline{AB}$  thành  $\overline{DC}$
  - b) Biến  $\overline{AB}$  thành  $\overline{CD}$
10. Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ . Đường tròn  $(O')$  tiếp xúc trong với  $(O)$  tại  $C$  và tiếp xúc  $AB$  tại  $D$ . Đường thẳng  $CD$  cắt  $(O)$  tại  $I$ . Chứng minh  $IA = IB$ .  
**HD:** dùng phép vị tự tâm  $C$
11. Tam giác  $ABC$  có hai đỉnh  $B, C$  cố định, còn đỉnh  $A$  chạy trên một đường tròn  $(O)$ . Tìm quỹ tích trọng tâm tam giác  $ABC$ .  
**HD:** dùng phép vị tự tâm  $I$  là trung điểm của  $BC$ .
12. Cho đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Dựng qua  $A$  một đường thẳng  $d$  cắt  $(O)$  ở  $M$  và cắt  $(O')$  ở  $N$  sao cho  $M$  là trung điểm  $AN$ .



13. Cho tam giác ABC và một điểm M nằm trong tam giác đó. Dựng đường tròn đi qua M và tiếp xúc với hai cạnh của tam giác ABC.

**HD:** xét 3 trường hợp cho các cặp cạnh

14. Cho hình thoi ABCD cạnh a, góc nhọn  $A = 60^\circ$ .

a) Tính diện tích đường tròn nội tiếp (I).

b) Tính phương tích của A đối với đường tròn (BCD).

c) Tìm quỹ tích các điểm M có phương tích M đối với (I) bằng  $-\frac{a^2}{4}$ .

d) Tìm quỹ tích các trung điểm của BM.

**HD:** dùng phép vị tự tâm B tỉ  $k = \frac{1}{2}$

15. Cho (O) có 2 bán kính OA, OB. Dựng dây MN sao cho OA, OB chia MN ra 3 phần bằng nhau.

16. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có B, C cố định. Tìm quỹ tích:

a) Trục tâm H của tam giác ABC

b) Trung điểm I của AC.

c) Điểm D mà B trung điểm AD.

**HD:** dùng định nghĩa các phép dời hình, phép vị tự

17. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có B, C cố định. Tìm quỹ tích:

a) Trọng tâm G của tam giác ABC

b) Đỉnh thứ 3 của tam giác ABC đều

c) Điểm D mà A trung điểm BD.

**HD:** dùng định nghĩa các phép dời hình, phép vị tự

18. Cho điểm I ở trong đường tròn (O). Một đường thẳng lưu động qua I, cắt đường tròn tại M, N. Tìm tập hợp các điểm T sao cho  $\vec{IT} = \vec{IM} + \vec{IN}$ .

**HD:** dùng phép vị tự tâm I tỉ  $k = 2$

19. Cho hình thang có hai đáy AB, CD với  $AD = a$ ,  $DC = b$  cho trước và 2 đỉnh A, B cố định. Tìm quỹ tích giao điểm của 2 đường chéo.

**ĐS:** ảnh vị tự của quỹ tích đỉnh C qua phép vị tự tâm A, tỉ số  $\frac{AB}{AB+b}$

20. Cho 2 đường thẳng a, b và điểm I. Tìm hai điểm A thuộc a và B thuộc b sao cho I chia đoạn AB theo tỉ số k cho trước.

**HD:** dùng phép vị tự tâm I tỉ số k.

21. Cho điểm A ở trong góc nhọn xOy. Tìm điểm M trên tia Oy sao cho khoảng cách từ M đến Ox bằng MA.

**HD:** hạ MH vuông góc với Ox rồi tìm ảnh của tam giác AMH.

22. Cho 6 đường thẳng a, b, c, d, d', d'' đôi một cắt nhau và không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Dựng ba điểm A, B, C lần lượt thuộc 3 đường thẳng a, b, c sao cho  $AB \parallel d$ ,  $BC \parallel d'$  và  $CA \parallel d''$ .

**HD:** sử dụng định lý Talet



# ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

## §1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Điểm, đường thẳng, mặt phẳng:
  - Điểm thường đặt tên A, B, C, D, ...
  - Đường thẳng thường đặt tên a, b, c, d, ...,  $\Delta$ ,  $\Delta'$ , ...
  - Mặt phẳng thường đặt tên  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$ , ..., (P), (Q), ...
- Quan hệ thuộc:
  - Điểm A thuộc đường thẳng a:  $A \in a$ .
  - Điểm B không thuộc đường thẳng a:  $B \notin a$
  - Điểm A thuộc mặt phẳng (P):  $A \in (P)$ ,  $A \in mp(P)$ .
  - Điểm B không thuộc mặt phẳng (P):  $B \notin (P)$ ,  $B \notin mp(P)$ .
  - Đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (Q):  $d \subset (Q)$ ,  $d \subset mp(Q)$
  - Đường thẳng a không nằm trên mặt phẳng  $(\alpha)$ :  $a \not\subset (\alpha)$ ,  $a \not\subset mp(\alpha)$ .
- Hình biểu diễn: vẽ hình phẳng của các hình không gian với các quy tắc:
  - Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng được biểu diễn bởi đoạn thẳng.
  - Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau).
  - Điểm A thuộc đường thẳng a được biểu diễn bởi một điểm A' thuộc đường thẳng a', trong đó a' biểu diễn cho đường thẳng a.
  - Dùng nét vẽ liền (—) để biểu diễn cho những đường trông thấy và dùng nét đứt đoạn (- - -) để biểu diễn cho những đường bị khuất.
- Các tính chất thừa nhận của hình học không gian:
  - Tính chất 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.
  - Tính chất 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.
  - Tính chất 3: Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.
  - Tính chất 4: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó. Đường thẳng chung này gọi là giao tuyến của 2 mặt phẳng cắt nhau.



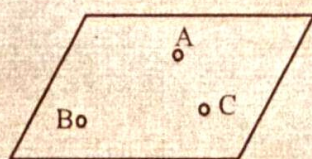
- Tính chất 5: Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

**Định lý:** Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều nằm trong mặt phẳng đó.

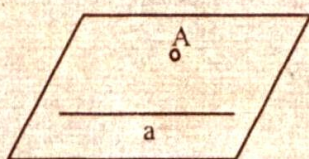
• Cách xác định mặt phẳng:

Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết:

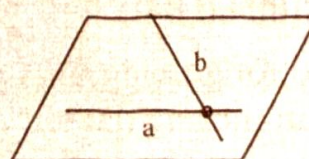
- Mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng;
- Mặt phẳng đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó;
- Mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau.



$mp(ABC)$



$mp(A;a)$

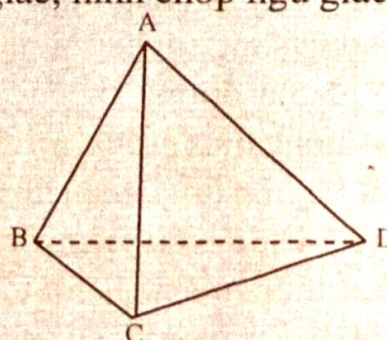
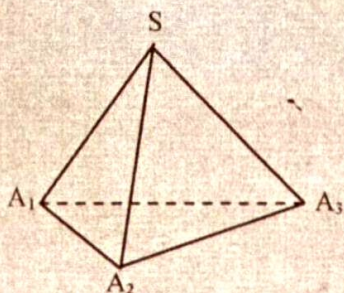


$mp(a; b)$

• Hình chóp và hình tứ diện:

- Cho đa giác  $A_1A_2...A_n$  và một điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh  $A_1, A_2, ..., A_n$  để được n tam giác:  $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ . Hình gồm n tam giác đó và đa giác  $A_1A_2...A_n$  gọi là hình chóp và được kí hiệu là  $S.A_1A_2...A_n$ .

Điểm S gọi là đỉnh của hình chóp. Đa giác  $A_1A_2...A_n$  gọi là mặt đáy của hình chóp. Các cạnh của mặt đáy gọi là các cạnh đáy của hình chóp. Các đoạn thẳng  $SA_1, SA_2, ..., SA_n$  gọi là các cạnh bên của hình chóp. Mỗi tam giác  $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$  gọi là một mặt bên của hình chóp. Nếu đáy của hình chóp là một tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... thì hình chóp tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác...



- Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là hình tứ diện hay là tứ diện và kí hiệu là ABCD. Các điểm A, B, C, D gọi là các đỉnh của tứ diện. Các đoạn thẳng AB, BC, CD, AD, CA, BD gọi là các cạnh của tứ diện. Hai cạnh không có điểm chung gọi là hai cạnh đối diện. Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là các mặt của tứ diện. Đỉnh không nằm trên một mặt gọi là đỉnh đối diện với mặt đó.



Tứ diện ABCD có thể coi là hình chóp tam giác với 4 cách chọn đỉnh chóp.

Tứ diện đều là tứ diện có 4 mặt là 4 tam giác đều.

- Thiết diện (hay mặt cắt) của hình (H) khi cắt bởi  $mp(P)$  là phần chung của  $mp(P)$  và hình (H).

- Quy ước: Khi nói đến "tam giác", ta có thể hiểu là hình gồm ba cạnh của nó hoặc là hình gồm ba cạnh và các điểm nằm trong tam giác đó. Đối với đa giác cũng như thế.

Chú ý: - Nếu có nhiều điểm thuộc một mặt phẳng thì ta nói rằng các điểm đó đồng phẳng, còn nếu không có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói rằng chúng không đồng phẳng.

- Hình lập phương ABCD.A'B'C'D' gồm 6 mặt là hình vuông, hình hộp chữ nhật gồm 6 mặt là hình chữ nhật.

## B. PHÂN LẠNG TOÁN

### DẠNG 1: HÌNH BIỂU DIỄN VÀ VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

- Để vẽ được hình biểu diễn hoặc đánh giá một hình biểu diễn đúng hoặc sai, ta dựa vào các quy tắc vẽ hình biểu diễn đã nêu: đoạn thẳng, đường thẳng song song, cắt nhau, điểm thuộc đường thẳng, ... và đặc biệt là vẽ liền nét cho những đường trông thấy và vẽ nét đứt cho phần đường bị mặt che khuất. Trước hết là tập vẽ đúng, sau đó chỉnh hình và nâng lên vẽ tốt để thuận lợi cho việc nhìn và định hướng giải toán.

- Vị trí tương đối của điểm A và đường thẳng a là  $A \in a$  hoặc  $A \notin a$ , của điểm B và mặt phẳng  $(\alpha)$  là  $B \in (\alpha)$  hoặc  $B \notin (\alpha)$ .

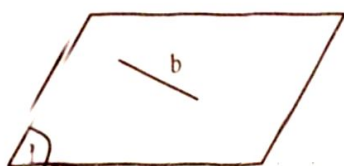
- Một đường thẳng được xác định khi biết hai điểm phân biệt của nó, hoặc 2 mặt phẳng phân biệt cùng chứa nó.

- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa ba điểm không thẳng hàng, hoặc biết nó chứa một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó, hoặc biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

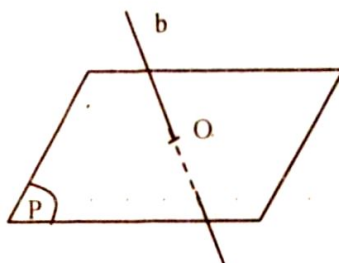
Chú ý: Sử dụng phương pháp phản chứng để chứng minh gián tiếp.

**Ví dụ 1:** Vẽ hình biểu diễn một đường thẳng nằm trong mặt phẳng, một đường thẳng cắt mặt phẳng.

**Giải**



$b \subset mp(P)$

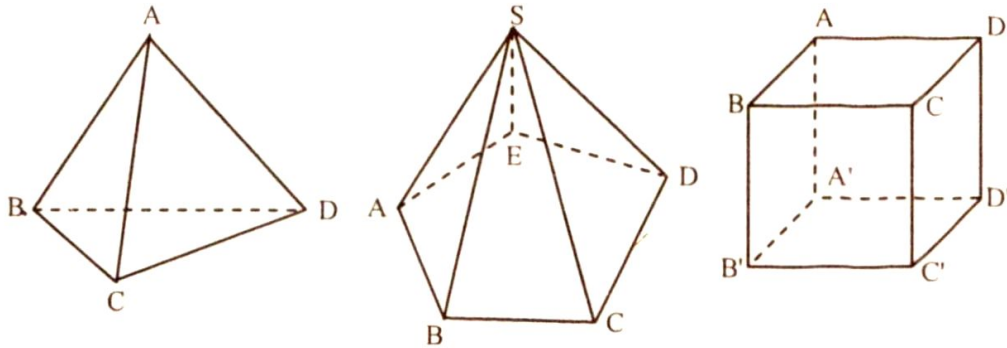


$b \cap (P) = O$



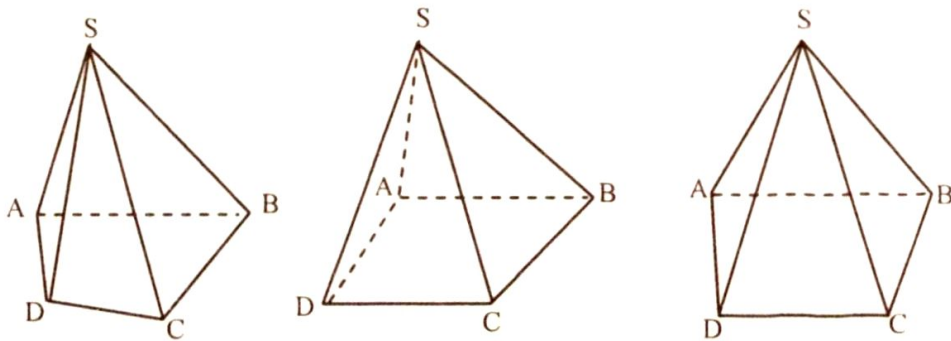
**Ví dụ 2:** Vẽ hình biểu diễn của một tứ diện, hình chóp ngũ giác, hình lập phương.

**Giải**

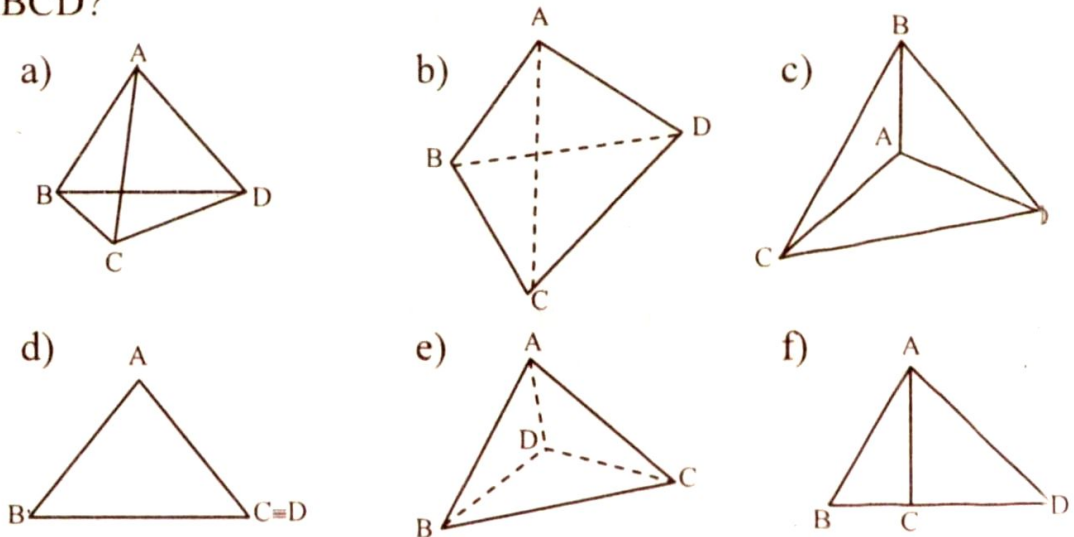


**Ví dụ 3:** Vẽ hình biểu diễn của một hình chóp tứ giác với đáy là tứ giác lồi, đáy là hình bình hành, đáy là hình thang.

**Giải**



**Ví dụ 4:** Trong các hình sau, hình nào là hình biểu diễn của một tứ diện ABCD?



Các hình c), d), e), f) là hình biểu diễn của tứ diện ABCD.

Hình a) không phải vì AC, BD đều liền nét (thấy).

Hình b) không phải vì AC, BD đều nét đứt (khuất).

**Ví dụ 5:** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- a) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm cho trước;
- b) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước;
- c) Ba điểm không thẳng hàng cùng thuộc một mặt phẳng duy nhất.



### Giải

Theo tính chất thừa nhận 2 thì b) đúng và c) đúng.

**Ví dụ 6** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- a) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng cho trước.
- b) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng chứa điểm đó;
- c) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng không chứa điểm đó.

### Giải

Theo các cách xác định một mặt phẳng thì chỉ có c) đúng.

**Ví dụ 7:** Hãy tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

- a) Có một mặt phẳng duy nhất đi qua hai đường thẳng cho trước;
- b) Có một mặt phẳng duy nhất đi qua hai đường thẳng cắt nhau cho trước;
- c) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua hai đường thẳng mà hai đường thẳng đó lần lượt nằm trên hai mặt phẳng cắt nhau.

### Giải

Theo cách xác định một mặt phẳng thì chỉ có b) đúng.

**Ví dụ 8:** a) Có hình chóp nào mà số cạnh gồm các cạnh bên và cạnh đáy của nó là số lẻ không? Tại sao?

b) Hình chóp có 20 cạnh thì có bao nhiêu mặt?

### Giải

- a) Không có hình chóp nào mà số cạnh của nó là số lẻ, vì số cạnh bên của hình chóp bằng số cạnh đáy của nó nên số cạnh phải là số chẵn.
- b) Hình chóp có 20 cạnh thì có 10 cạnh bên và 10 cạnh đáy, 10 cạnh đáy thì có 10 mặt bên. Hình chóp có một mặt đáy nên số mặt là  $10 + 1 = 11$ .

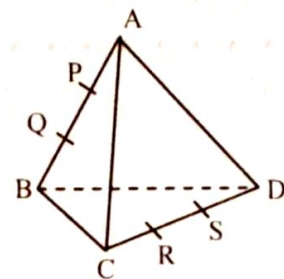
**Ví dụ 9:** Cho tứ diện ABCD.

- a) Chứng minh rằng nếu trên đường thẳng AB lấy hai điểm P, Q phân biệt thì hai đường thẳng CP và DQ không cắt nhau, hai đường thẳng CQ và DP cũng không cắt nhau.
- b) Có thể tìm hai điểm P, Q phân biệt trên AB và R, S phân biệt trên CD sao cho bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng hay không?

### Giải

Ta dùng phương pháp phản chứng.

- a) Giả sử CP và DQ cắt nhau thì bốn điểm P, Q, C, D đồng phẳng và do đó A, B, C, D đồng phẳng vô lí. Tương tự CQ và DP cũng không cắt nhau.
- b) Giả sử có các điểm P, Q, R, S như vậy thì 4 điểm A, B, C, D sẽ đồng phẳng: vô lí. Vậy không tồn tại.





**Ví dụ 10:** Cho  $n$  điểm ( $n \geq 4$ ) trong đó bất kì 4 điểm nào cũng đồng phẳng. Chứng tỏ rằng  $n$  điểm đó đồng phẳng.

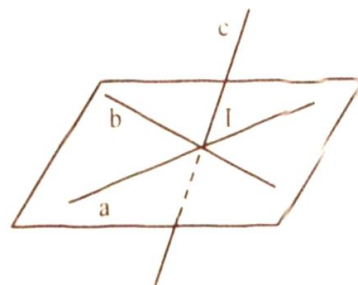
**Giải**

Ta dùng phản chứng. Giả sử  $n$  điểm đó không đồng phẳng thì ít nhất phải có 4 điểm trong chúng không đồng phẳng, trái giả thiết.

**Ví dụ 11:** Cho hai đường thẳng  $a$  và  $b$  cắt nhau. Một đường thẳng  $c$  cắt cả  $a$  và  $b$ . Có thể kết luận rằng ba đường thẳng  $a$ ,  $b$ ,  $c$  cùng nằm trong một mặt phẳng hay không?

**Giải**

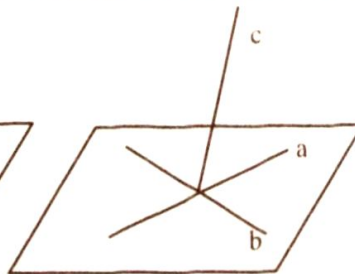
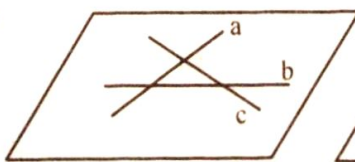
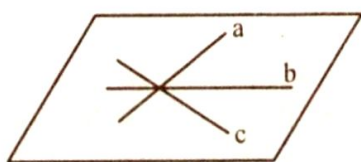
Không chắc: Bởi vì nếu  $a$  và  $b$  cắt nhau tại  $I$  thì đường thẳng  $c$  qua  $I$  cắt cả  $a$  và  $b$  nhưng nó có thể không thuộc  $mp(a; b)$ .



**Ví dụ 12:** Cho 3 đường thẳng  $a$ ,  $b$ ,  $c$  đôi một cắt nhau. Có thể kết luận 3 đường này đồng phẳng và đồng quy?

**Giải**

Không chắc. Ta minh họa 3 hình vẽ sau tương ứng 3 đường thẳng  $a$ ,  $b$ ,  $c$  đồng phẳng và đồng quy; đồng phẳng và không đồng quy; không đồng phẳng và đồng quy.

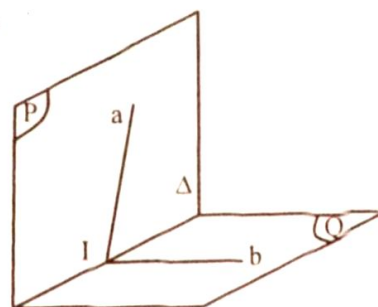


**Ví dụ 13:** Cho hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  cắt nhau theo giao tuyến  $\Delta$ . Trên  $(P)$  cho đường thẳng  $a$  và trên  $(Q)$  cho đường thẳng  $b$ . Chứng minh rằng nếu  $a$  và  $b$  cắt nhau thì giao điểm phải nằm trên  $\Delta$ .

**Giải**

Giả sử  $a$  và  $b$  cắt nhau tại  $I$ . Khi đó  $I$  thuộc  $a$ , mà  $a$  lại thuộc  $mp(P)$  suy ra  $I \in (P)$ . Lí luận tương tự ta có  $I \in (Q)$  nên  $I$  phải thuộc giao tuyến của  $(P)$  và  $(Q)$ .

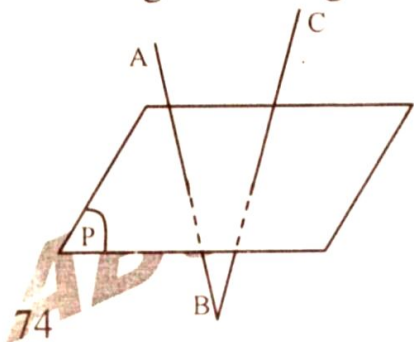
Vậy  $I \in \Delta$ .



**Ví dụ 14:** Cho mặt phẳng  $(P)$  và ba điểm  $A$ ,  $B$ ,  $C$  không nằm trên  $(P)$ . Giả sử đoạn thẳng  $AB$  và đoạn thẳng  $BC$  đều cắt  $mp(P)$ . Chứng minh rằng đoạn thẳng  $AC$  không cắt  $mp(P)$ .

**Giải**

Vì đoạn  $AB$  cắt  $(P)$  nên  $A$  và  $B$  ở khác phía đối với  $(P)$ . Tương tự  $BC$  cắt  $(P)$  nên  $B$  và  $C$  ở khác phía đối với  $(P)$ . Do đó  $A$  và  $C$  ở cùng phía đối với  $(P)$  nên đoạn  $AC$  không cắt  $(P)$ .

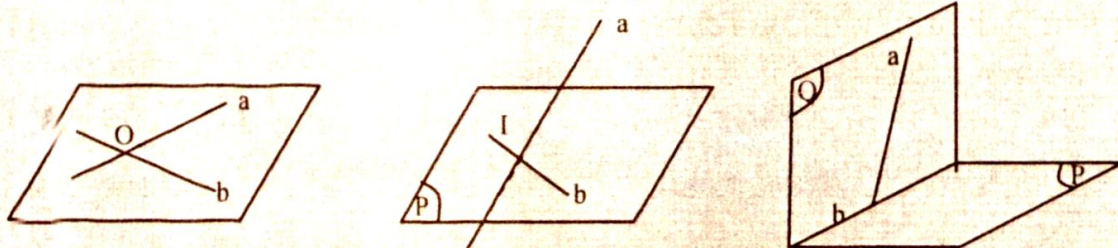




## DẠNG 2: GIAO ĐIỂM, GIAO TUYẾN, THIẾT DIỆN

- Xác định giao điểm của 2 đường thẳng  $a, b$ : trước hết 2 đường thẳng này phải thuộc 1 mặt phẳng, sau đó mới xác định giao điểm nếu có của chúng.

- Xác định giao điểm của đường thẳng  $a$  và mặt phẳng  $(P)$ : Nếu trong  $(P)$  tìm được đường thẳng  $b$  cắt  $a$  tại  $I$  thì  $I$  là giao điểm cần tìm. Tổng quát, chọn mặt phẳng phụ  $(Q)$  thuận lợi chứa  $a$ , tìm giao tuyến  $b$  của  $(P)$  và  $(Q)$ , bài toán đưa về tìm giao điểm của  $a$  với  $b$  trên  $mp(Q)$ .



Chú ý: -Hai đường thẳng đồng phẳng mới hy vọng cắt nhau.

- Xác định giao tuyến của 2 mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$ : Tìm hai điểm chung phân biệt  $M, N$  của 2 mặt phẳng, giao điểm là đường thẳng  $MN$ :  $(P) \cap (Q) = MN$ .

Chú ý: Nếu 2 mặt phẳng đã có một điểm chung rồi thì chỉ cần tìm thêm điểm chung thứ 2, điểm này thường là giao điểm của 2 đường thẳng đặc biệt lần lượt nằm trong 2 mặt phẳng đã cho nhưng lại thuộc mặt phẳng thứ 3.

- Xác định thiết diện (mặt cắt) của mặt phẳng  $(P)$  với hình khối  $(H)$ : mặt phẳng  $(P)$  cắt một số cạnh của  $(H)$  tạo thành đỉnh, cắt một số mặt của  $(H)$  tạo thành cạnh. Các đỉnh và các cạnh này tạo thành đa giác thiết diện.

Chú ý: Thiết diện là một hình "kín biên", "kín" là được nối liên tiếp và khép kín chu vi đa giác, "biên" là các cạnh thuộc các mặt ngoài của hình khối.

• Các kỹ thuật quan trọng:

- Tìm hai đường thẳng nào cắt nhau, hai đoạn thẳng nào kéo dài cắt nhau trong mặt phẳng.

- Đờng giống: Có thể giống chiếu từ đỉnh các điểm, các đường thẳng xuống cạnh đáy, mặt đáy, rồi giống chiếu ngược lên tìm giao điểm.

- Giao tuyến gốc: Bài toán thực hiện từng bước, có thể dùng giao tuyến của 2 mặt phẳng này làm cơ sở để tìm tiếp các giao điểm, giao tuyến còn lại.

- Quan hệ cho: Lưu ý các giả thiết của đề bài về song song và không song song, về phân biệt và không phân biệt, về đồng phẳng và không đồng phẳng.

**Ví dụ 1:** Cho hình chóp  $S.ABCD$ , đáy có 2 cạnh  $AB$  và  $CD$  không song song. Xác định giao tuyến của:

a) Hai mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(SBD)$ .

b) Hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$ .



### Giải

- a) Ta có  $S$  là điểm chung thứ nhất của 2  $mp(SAC)$  và  $mp(SBD)$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$  thì  $O$  là điểm chung thứ hai.

Vậy giao tuyến của  $mp(SAC)$  và  $mp(SBD)$  là đường thẳng  $SO$ .

- b) Theo giả thiết,  $AB$  và  $CD$  không song song nên kéo dài cắt nhau tại  $I$ . Ta có  $S$  và  $I$  là 2 điểm chung của 2  $mp(SAB)$  và  $(SCD)$  nên giao tuyến là đường thẳng  $SI$ .

**Ví dụ 2:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $CI$ . Xác định giao tuyến của:

- a)  $(ABJ)$  và  $(CDI)$   
b)  $(AKD)$  và  $(BCD)$ .

### Giải

- a) Ta có  $I$  thuộc  $AB$ ,  $J$  thuộc  $CD$  nên  $I$  và  $J$  là hai điểm chung của 2  $mp(ABJ)$ ,  $mp(CDI)$  nên giao tuyến của chúng là  $IJ$ .

- b) Trong  $mp(ABC)$ , kéo dài  $AK$  cắt  $BC$  tại  $M$  thì  $D$  và  $M$  là hai điểm chung của 2  $mp(AKD)$  và  $(BCD)$ .

Do đó giao tuyến của chúng là đường thẳng  $MD$ .

**Ví dụ 3:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là tứ giác  $ABCD$  có hai cạnh đối diện không song song. Lấy điểm  $M$  thuộc miền trong của tam giác  $SCD$ . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

- a)  $(SBM)$  và  $(SCD)$                       b)  $(ABM)$  và  $(SCD)$   
c)  $(ABM)$  và  $(SAC)$ .

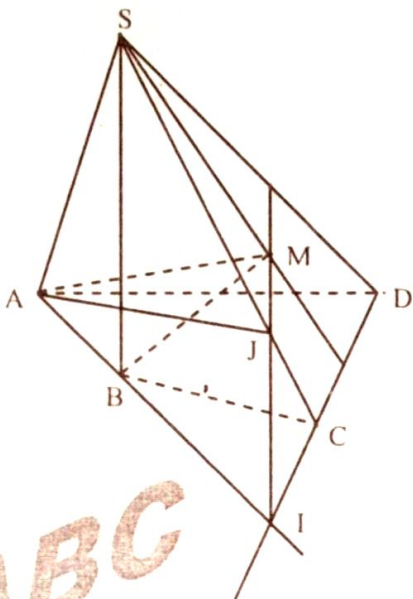
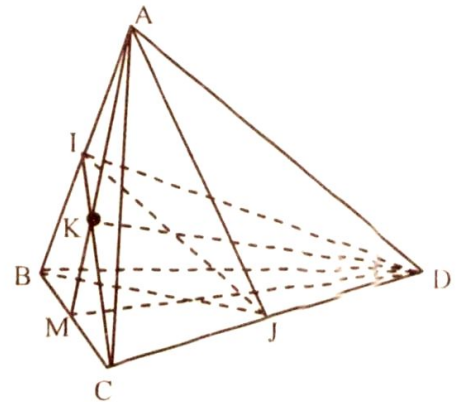
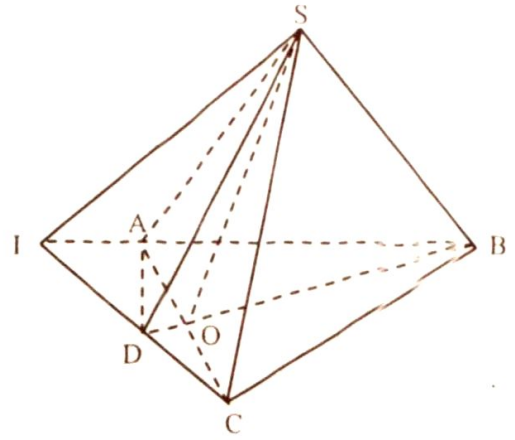
### Giải

- a) Ta có  $S$  và  $M$  là hai điểm chung của 2  $mp(SBM)$  và  $(SCD)$  nên giao tuyến là đường thẳng  $SM$ .

- b) Từ giả thiết, trong  $mp(ABCD)$  kéo dài  $AB, CD$  cắt nhau tại  $I$ .

Vì  $I \in AB, I \in CD$  nên  $I$  và  $M$  là 2 điểm chung của 2  $mp(ABM)$  và  $mp(SCD)$  nên giao tuyến của chúng là đường thẳng  $IM$ .

- c) Trong  $mp(SCD)$ ,  $IM$  cắt  $SC$  tại  $J$  thì giao tuyến của  $mp(ABM)$  và  $(SAC)$  là đường thẳng  $AJ$ .





**Ví dụ 4:** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  với hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  cắt nhau. Gọi  $A'$  là một điểm nằm giữa hai điểm  $S$  và  $A$ . Hãy tìm các giao tuyến của  $mp(A'CD)$  với các mặt phẳng

- a)  $(ABCD)$ ,  $(SCD)$ ,  $(SDA)$       b)  $(SBC)$ ,  $(SAB)$ .

**Giải**

- a) Theo giả thiết ta có:

$$(ABCD) \cap (A'CD) = CD ; (SCD) \cap (A'CD) = CD$$

$$(SDA) \cap (A'CD) = DA'.$$

- b) Trong  $mp(ABCD)$ , kéo dài  $AB$  cắt  $CD$  tại  $K$

Trong  $mp(SAB)$ ,  $A'K$  cắt  $SB$  tại  $B'$  thì

$$(SAB) \cap (A'CD) = A'B'$$

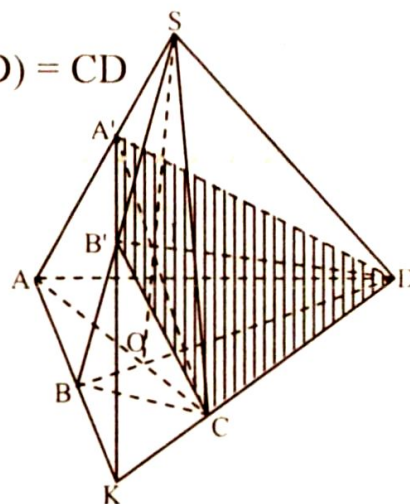
$$(SBC) \cap (A'CD) = CB'$$

Cách khác:

Trong  $mp(ABCD)$ ,  $AC$  cắt  $BD$  tại  $O$ .

Trong  $mp(SAC)$ ,  $SO$  cắt  $A'C$  tại  $I$ .

Trong  $mp(SBD)$ ,  $DI$  cắt  $SB$  tại  $B'$ .



**Ví dụ 5:** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  không đồng phẳng. Gọi  $I, K$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ .

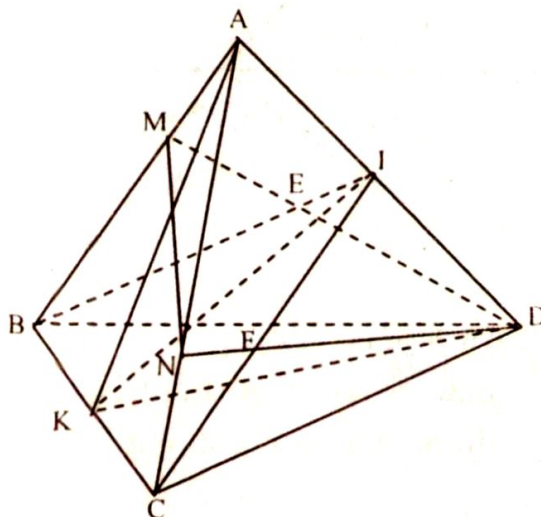
- a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(IBC)$  và  $(KAD)$ .

- b) Gọi  $M$  và  $N$  là hai điểm lần lượt lấy trên hai đoạn  $AB$  và  $AC$ . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(IBC)$  và  $(DMN)$ .

**Giải**

- a) Hai mặt phẳng  $(IBC)$  và  $(KAD)$  có hai điểm chung là  $I$  và  $K$ . Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng này là đường thẳng  $IK$ .

- b) Gọi  $E$  là giao điểm của  $BI$  và  $MD$ ,  $F$  là giao điểm của  $CI$  và  $DN$ . Hai mặt phẳng  $(IBC)$  và  $(DMN)$  có hai điểm chung là  $E$  và  $F$ . Vậy đường thẳng  $EF$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(IBC)$  và  $(DMN)$ .



**Ví dụ 6:** Cho tứ diện  $ABCD$  và điểm  $M$  thuộc miền trong của tam giác  $ACD$ . Gọi  $I$  và  $J$  tương ứng là hai điểm trên cạnh  $BC$  và  $BD$  sao cho  $IJ$  không song song với  $CD$ .

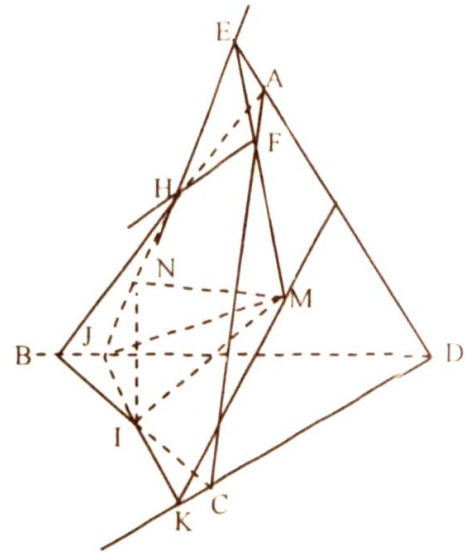
- a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng  $(IJM)$  và  $(ACD)$ .

- b) Lấy  $N$  là điểm thuộc miền trong của tam giác  $ABD$  sao cho  $JN$  cắt đoạn  $AB$  tại  $H$ . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(MNJ)$  và  $(ABC)$ .



### Giải

- a) Theo giả thiết, kéo dài IJ cắt CD tại K.  
Ta có M và K là hai điểm chung của 2 mp(IJM) và (ACD) nên giao tuyến của chúng là đường thẳng KM.
- b) Vì  $JN \cap AB = H$  nên H là điểm chung của 2 mp(MNJ), (ABC).  
Trong mp(ABD),  $JH \cap AD = E$ .  
Trong mp(ACD),  $EM \cap AC = F$  thì F là điểm chung thứ hai.  
Vậy  $(ABC) \cap (MNJ) = HF$ .



**Ví dụ 7:** Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AD với  $AI = \frac{1}{3}AB$  và  $AJ = \frac{3}{4}AD$ . Gọi G là trọng tâm tam giác ACD. Tìm giao điểm của đường thẳng IJ, IG với mp(BCD).

### Giải

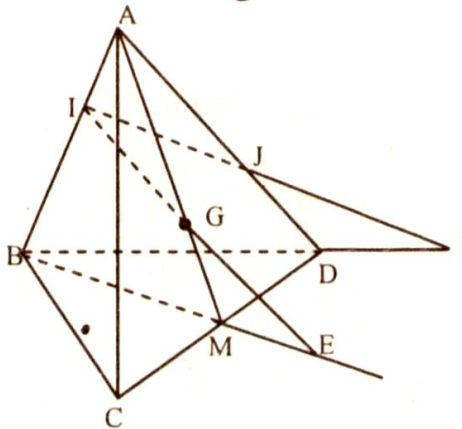
Trong mp(ABD), theo giả thiết IJ, BD không song song nên kéo dài cắt nhau tại K.

Ta có  $K \in IJ, K \in BD$

$\Rightarrow K \in IJ, K \in (BCD)$ .

Vậy  $IJ \cap (BCD) = K$ .

Gọi M là trung điểm của CD, trong mp(ABM) kéo dài IG cắt BM tại E thì E chính là giao điểm của IG với mp(BCD).

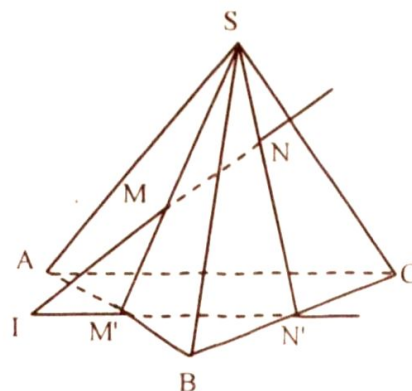


**Ví dụ 8:** Cho hình chóp tam giác S.ABC. Một điểm M nằm trong miền tam giác SAB, một điểm N nằm trong miền tam giác SBC. Xác định giao điểm của đường thẳng MN và mp(ABC) nếu có.

### Giải

Kéo dài SM cắt AB tại M', SN cắt BC tại N'.

Trong mp(SM'N') nếu MN cắt M'N' tại I thì I chính là giao điểm của đường thẳng MN và mp(ABC). Đặc biệt, nếu  $MN \parallel M'N'$ , thì MN không cắt mp(ABC).





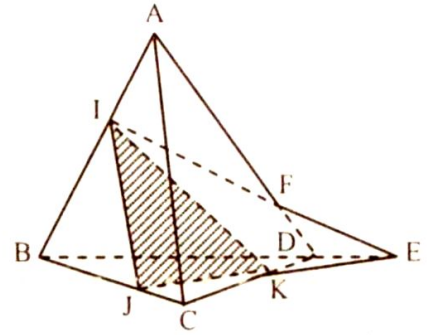
**Ví dụ 9:** Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J và K lần lượt là các điểm trên các cạnh AB, BC và CD sao cho  $JB = 2JC$ ,  $KC = 3KD$ . Tìm giao điểm của đường thẳng BD, đường thẳng AD với mp(IJK).

**Giải**

Trong mp(BCD), theo giả thiết đường thẳng JK không song song với BD nên kéo dài JK cắt BD tại E.

Ta có:  $BD \cap (IJK) = E$ .

Trong mp(ABD), IE cắt AD tại F thì F chính là giao điểm của đường thẳng AD với mp(IJK).

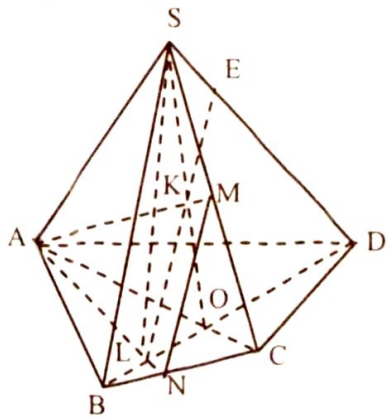


**Ví dụ 10:** Cho hình chóp S.ABCD, M và N tương ứng là các điểm thuộc các cạnh SC và BC.

a) Tìm giao tuyến của mp(SBD) và (AMN).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN).

**Giải**



a) Trong mp(ABCD),  $AC \cap BD = O$ ,  $AN \cap BD = L$ .

Trong mp(SAC),  $SO \cap AM = K$

thì  $(SBD) \cap (AMN) = LK$ .

b) Dựa vào giao tuyến LK của câu trên thì trong mp(SBD),  $LK \cap SD = E$ . Ta có L, K thuộc mp(AMN) nên E thuộc mp(AMN). Vậy E chính là giao điểm của SD với mp(AMN).

**Ví dụ 11:** Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm I và lấy các điểm J, K lần lượt là điểm thuộc miền trong các tam giác BCD và ACD.

a) Hãy xác định giao điểm L của IK với mp(ABC).

b) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IJK) với các mặt của tứ diện ABCD.

**Giải**

a) Trong mp(BCD),  $DJ \cap BC = M$

Trong mp(ACD),  $DK \cap AC = N$

Do đó  $(ABC) \cap (KJD) = MN$ .

Trong mp(MND),  $JK \cap MN = L$  thì  $L = JK \cap (ABC)$ .

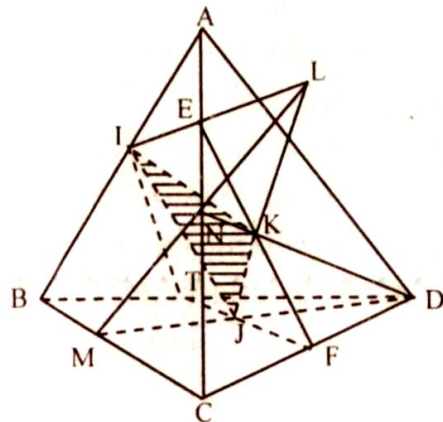
b) Theo câu a) thì  $(IJK) \cap (ABC) = IL$

Trong mp(ABC),  $IL \cap AC = E$ ,

trong mp(ACD),  $EK \cap CD = F$ ,

trong mp(BCD),  $FJ \cap BD = T$ .

Ta có:  $(IJK) \cap (ACD) = EF$ ,  $(IJK) \cap (BCD) = FT$ ,  $(IJK) \cap (ABD) = IT$ .





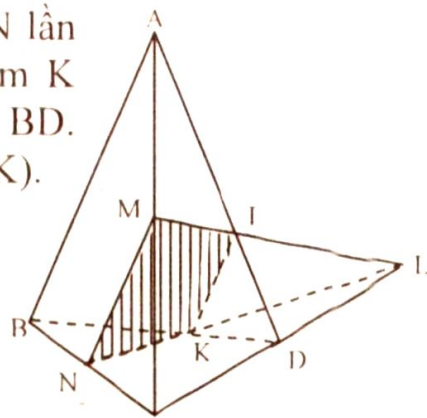
**Ví dụ 12:** Cho tứ diện ABCD, các điểm M và N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Lấy điểm K thuộc đoạn BD mà không là trung điểm của BD. Tìm thiết diện của tứ diện và mặt phẳng (MNK).

**Giải**

Trong mp(BCD),  $NK \cap CD = L$ .

Trong mp(ACD),  $ML \cap AD = I$ .

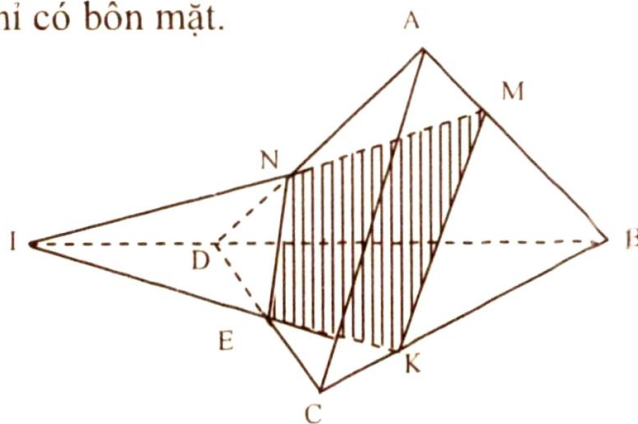
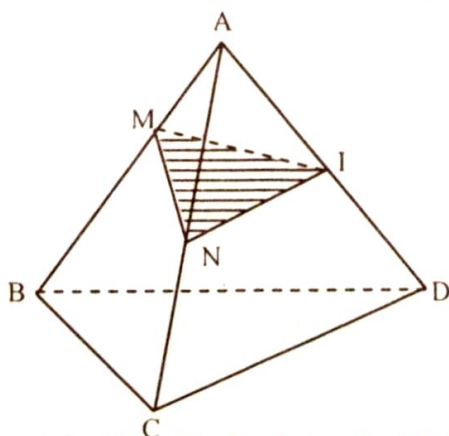
Nối IK thì thiết diện là tứ giác MNKI.



**Ví dụ 13:** Thiết diện của một hình tứ diện có thể là tam giác, tứ giác hoặc ngũ giác hay không?

**Giải**

Thiết diện của một hình tứ diện là tam giác khi mặt phẳng cắt ba mặt của tứ diện. Thiết diện là tứ giác khi mặt phẳng cắt cả bốn mặt của hình tứ diện. Thiết diện của một hình tứ diện không thể là một ngũ giác vì ngũ giác có năm cạnh mà tứ diện chỉ có bốn mặt.



**Ví dụ 14:** Cho hình chóp S.ABCD. Trong tam giác SCD, ta lấy một điểm M.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC)

b) Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (ABM).

**Giải**

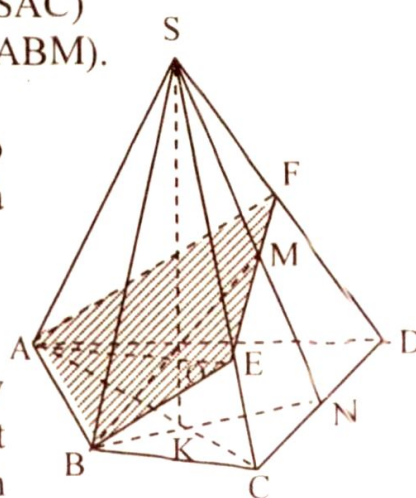
a) Gọi N là giao điểm của SM và CD, K là giao điểm của BN và AC. Giao tuyến cần tìm là đường thẳng SK.

b) Trong mặt phẳng (SBN), BM cắt SK tại O.

Ta suy ra O là giao điểm của BM với (SAC).

Trong mặt phẳng (SAC), AO cắt SC tại E, đây là giao điểm của (ABM) với cạnh SC, EM cắt SD tại F, đây là giao điểm của (ABM) với cạnh SD. Thiết diện cần tìm là tứ giác ABEF.

Cách 2: Trong mp(ABCD), kéo dài đường thẳng AB cắt BC tại I.



**Ví dụ 15:** Cho một hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, BC, CD.

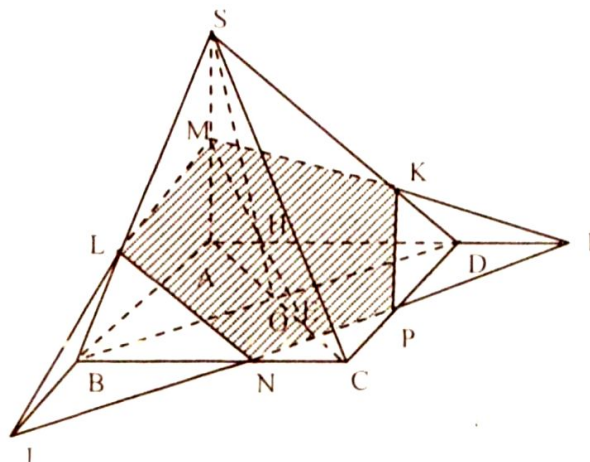


- a) Dụng thiết diện của hình chóp khi cắt bởi  $mp(MNP)$ .  
b) Gọi  $O$  là tâm của đáy. Tìm giao điểm của  $SO$  và  $(MNP)$ .

**Giải**

- a) Đường thẳng  $NP$  cắt  $AD$  tại  $I$  và cắt  $AB$  tại  $J$ ,  $MI$  cắt  $SD$  tại  $K$ ;  $MJ$  cắt  $SB$  tại  $L$ . Nối  $NL$ ,  $PK$  thì thiết diện là ngũ giác  $MLNPK$ .  
b) Trong  $mp(ABCD)$ ,  $AC$  cắt  $NP$  tại  $E$ .

Trong  $mp(SAC)$ ,  $SO$  cắt  $ME$  tại  $H$  thì  $H$  là giao điểm của  $SO$  với  $mp(MNP)$ .



**Ví dụ 16:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành. Gọi  $M$  là điểm nằm giữa  $S$  và  $A$ ;  $N$  là điểm nằm giữa  $S$  và  $B$ .

- a) Xác định thiết diện của hình chóp với  $mp(CMN)$ .  
b) Tìm giao tuyến của 2  $mp(SAB)$  và  $(SCD)$ .

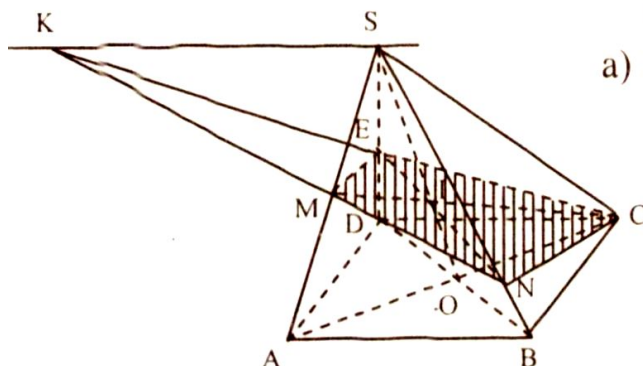
**Giải**

- a) Gọi  $O$  là tâm của hình bình hành  $ABCD$ .

Trong  $mp(SAC)$ ,  $SO \cap CM = I$ .

Trong  $mp(SBD)$ ,  $NI \cap SD = E$ .

Nối  $NM$ ,  $NC$ ,  $EC$ ,  $EM$  thì thiết diện là tứ giác  $MNCE$ .



- b) Trong  $mp(MNCE)$ , kéo dài  $CE$  và  $NM$  cắt nhau tại  $K$ , ta có  $S$  và  $K$  là 2 điểm chung của 2  $mp(SAB)$ ,  $(SCD)$ .

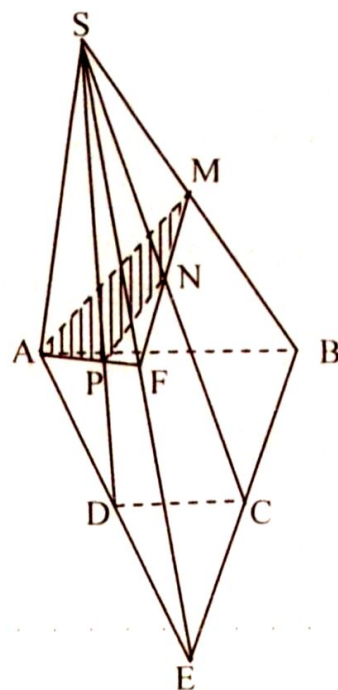
Vậy  $(SAB) \cap (SCD) = SK$ .

**Ví dụ 17:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang với  $AB$  là đáy lớn. Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $SB$  và  $SC$ .

- a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(SBC)$   
b) Xác định thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  với mặt phẳng  $(AMN)$

**Giải**

- a) Trong  $(ABCD)$ , gọi  $E$  là giao điểm của hai cạnh bên  $AD$  và  $BC$ . Giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(SBC)$  là đường thẳng  $SE$ .





- b) Mặt phẳng phụ (SAD) chứa SD cắt mặt phẳng (AMN) theo giao tuyến là đường thẳng AF với F là giao điểm của hai đường thẳng MN và SE. Gọi P là giao điểm của SD và AF thì P là giao điểm của SD và (AMN).

Thiết diện cần tìm là tứ giác AMNP

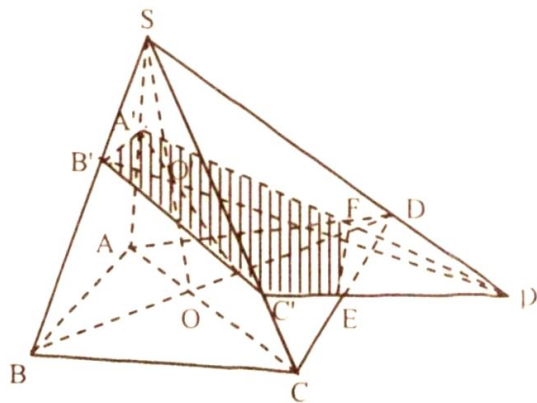
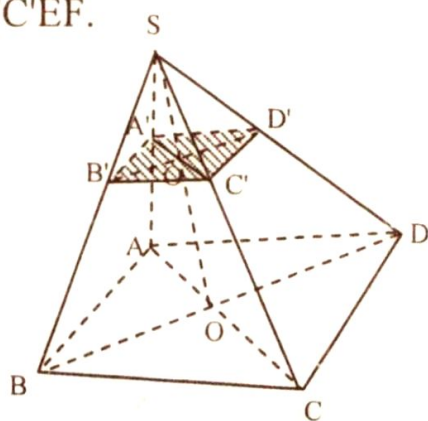
**Ví dụ 18:** Cho hình chóp tứ giác S.ABCD. Ba điểm A', B', C' lần lượt nằm trên ba cạnh SA, SB, SC nhưng không trùng với S, A, B, C. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(A'B'C').

### Giải

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi O' là giao điểm của A'C' và SO; D' là giao điểm của hai đường thẳng B'O' và SD.

- Nếu D' thuộc đoạn SD thì thiết diện là tứ giác A'B'C'D'.

- Nếu D' nằm trên phần kéo dài của cạnh SD, gọi E là giao điểm của CD và C'D', F là giao điểm của AD và A'D'. Nối EC', EF thì thiết diện là ngũ giác A'B'C'EF.



**Ví dụ 19:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình bình hành.

Trong mặt phẳng (ABCD) vẽ đường thẳng d đi qua A và không song song với các cạnh của hình bình hành. Gọi C' là một điểm nằm trên cạnh SC. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (d; C').

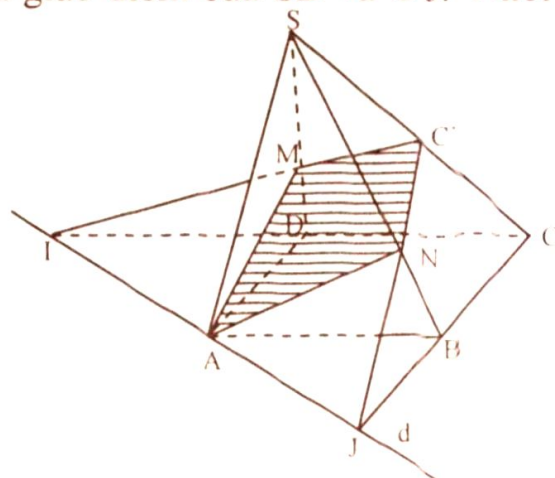
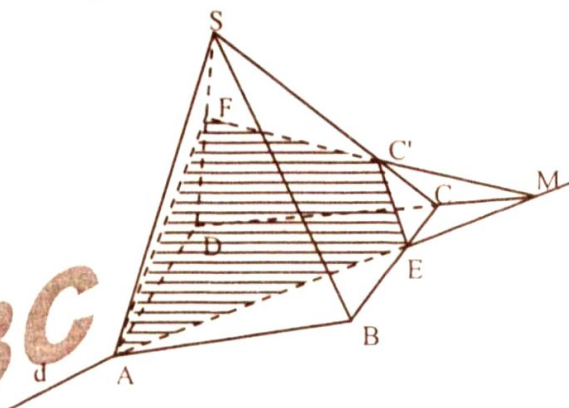
### Giải

- Nếu đường thẳng d cắt cạnh BC tại E và cắt DC kéo dài tại M. Nối MC' cắt SD tại F. Thiết diện cần tìm là tứ giác AEC'F.

Tương tự, nếu d cắt cạnh DC và cắt cạnh BC kéo dài, thiết diện là tứ giác.

- Nếu đường thẳng d đi qua điểm C thì được thiết diện là tam giác SAC.

- Nếu đường thẳng d cắt hai cạnh CD và CB kéo dài lần lượt tại I và J. Gọi M là giao điểm của SD và C'I, N là giao điểm của SB và C'J. Thiết diện là tứ giác AMC'N.





### DẠNG 3: ĐỒNG QUY, THẲNG HÀNG

• Chứng minh ba điểm thẳng hàng:

Để chứng minh ba điểm nào đó thẳng hàng, ta chứng minh ba điểm ấy cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt, lúc đó ba điểm này sẽ thẳng hàng trên giao tuyến.

Tổng quát, với nhiều điểm hơn cũng sử dụng phương pháp này.

• Chứng minh các đoạn đồng quy, các đường thẳng đồng quy:

Để chứng minh, ta sử dụng các định hướng:

- Đồng quy liên tiếp: hai đường thẳng đầu tiên cắt nhau, tiếp tục chứng minh đường thẳng thứ 3 đi qua giao điểm này, ...

- Chuyển thẳng hàng: Nếu hai đường thẳng cắt nhau tại O và đường thẳng thứ 3 đi qua A, B. Ta chứng minh ba điểm O, A, B thẳng hàng tức là O thuộc đường thẳng thứ 3, ...

- Đồng quy có tỉ lệ: Sử dụng các tính chất hình phẳng như hai đường chéo hình bình hành cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, các trung tuyến trong tam giác cắt nhau theo tỉ lệ 1: 2, ...

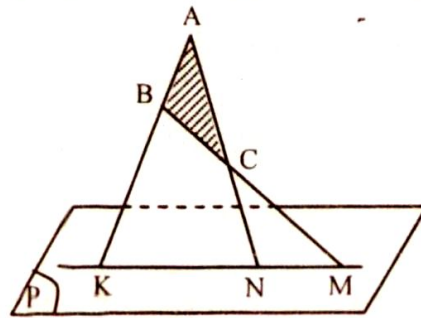
- Đồng quy và đồng phẳng: Ba đường thẳng đôi một cắt nhau và không đồng phẳng thì chúng đồng quy.

Chú ý: Nếu cần thì sử dụng phương pháp phản chứng.

**Ví dụ 1:** Cho ba điểm A, B, C không thuộc mặt phẳng (P) và các đường thẳng BC, CA, AB cắt (P) lần lượt tại M, N, K. Chứng minh rằng M, N, K thẳng hàng.

**Giải**

Ta có M, N, K lần lượt thuộc về hai mặt phẳng (P) và (ABC) nên M, N, K thuộc giao tuyến của (P) và (ABC). Vậy M, N, K thẳng hàng.



**Ví dụ 2:** Trên 3 tia Sx, Sy, Sz không đồng phẳng lần lượt lấy các điểm A và D, B và E, C và F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

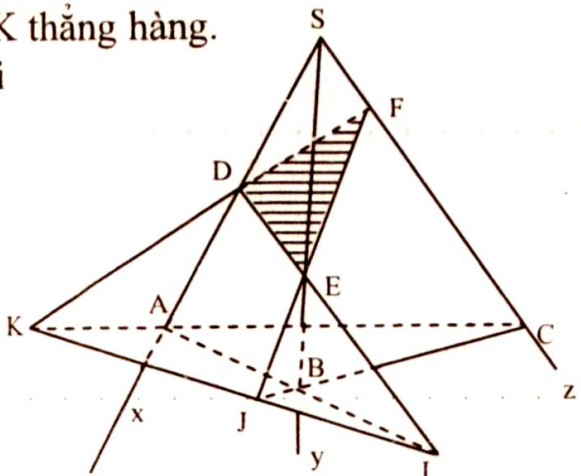
**Giải**

Ta có  $I = DE \cap AB$

$DE \subset (DEF) \Rightarrow I \in (DEF)$

$AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC)$

Lí luận tương tự thì J, K cũng lần lượt thuộc về hai mặt phẳng trên nên I, J, K thuộc về giao tuyến của (AFC) và (DEF) phân biệt. Vậy 3 điểm I, J, K thẳng hàng.





**Ví dụ 3:** Cho hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  cắt nhau theo giao tuyến  $d$ . Trong  $(\alpha)$  lấy hai điểm  $A$  và  $B$  sao cho  $AB$  cắt  $d$  tại  $I$ . Điểm  $O$  là một điểm nằm ngoài  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  sao cho  $OA$  và  $OB$  lần lượt cắt  $(\beta)$  tại  $A'$  và  $B'$ .

- Chứng minh ba điểm  $I, A', B'$  thẳng hàng và  $O, A, B$  không thẳng hàng.
- Trong  $(\alpha)$  lấy các điểm  $C$  sao cho  $A, B, C$  không thẳng hàng. Giả sử  $OC$  cắt  $(\beta)$  tại  $C'$ ,  $BC$  cắt  $B'C'$  tại  $J$ ,  $CA$  cắt  $C'A'$  tại  $K$ . Chứng minh  $I, J, K$  thẳng hàng.

**Giải**

- $I, A', B'$  là ba điểm chung của hai mặt phẳng  $(OAB)$  và  $(\beta)$  nên chúng thẳng hàng.

Giả sử  $O, A, B$  thẳng hàng thì  $O$  thuộc đường thẳng  $AB$ .

Mà  $A, B \in (\alpha) \Rightarrow O \in (\alpha)$ : vô lí.

Vậy  $O, A, B$  không thẳng hàng.

- $I, J, K$  là ba điểm chung của hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(A'B'C')$  nên chúng thẳng hàng trên giao tuyến.

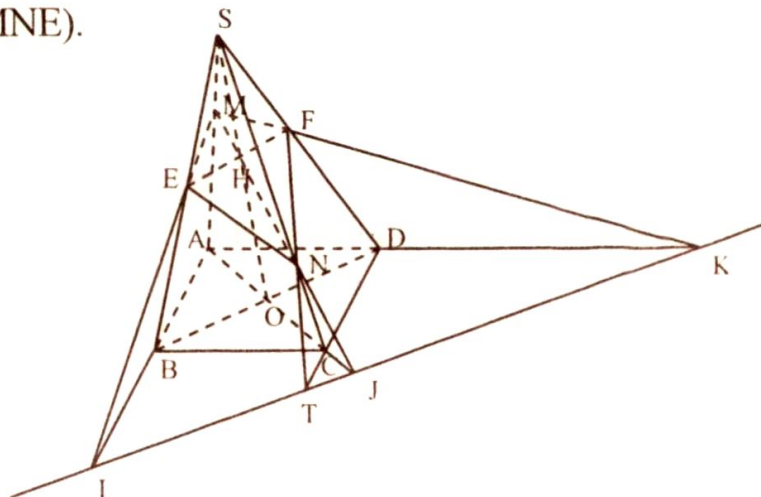
**Ví dụ 4:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành. Gọi  $E$  và  $N$  là trung điểm của  $SB, SC$  và  $M$  thuộc  $SA$  sao cho  $MA = 2MS$ .

- Tìm giao điểm  $F$  của  $SD$  với  $mp(MNE)$ .
- Chứng minh 4 giao điểm  $I, J, K, T$  của 4 đường thẳng  $ME, MN, MF, NF$  với đáy thẳng hàng.

**Giải**

- Trong  $mp(ABCD), AC \cap BD = O$

Trong  $mp(SAC), MN \cap SO = H$ , trong mặt phẳng  $(SBD), EH \cap SD = F$  thì  $F = SD \cap (MNE)$ .



- Theo giả thiết thì:

-  $(SAB): ME \cap AB = I$ ;  $(SAC): MN \cap AC = J$

-  $(SAD): MF \cap AD = K$ ;  $(SCD): NF \cap CD = T$ .

Ta có bốn điểm  $I, J, K, T$  cùng thuộc 2 mặt phẳng  $(ABCD)$  và  $(MNEF)$  nên chúng thẳng hàng trên giao tuyến.



**Ví dụ 5:** Cho  $n$  điểm trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Chứng minh rằng không có ba điểm nào trong chúng thẳng hàng.

**Giải**

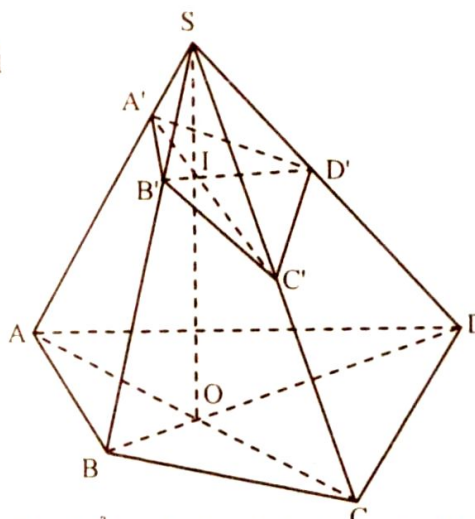
Nếu có ba điểm  $A, B, C$  trong  $n$  điểm đã cho thẳng hàng thì với một điểm  $D$  trong số điểm còn lại, phải có  $A, B, C, D$  đồng phẳng. Trái giả thiết. Vậy không có 3 điểm nào thẳng hàng.

**Ví dụ 6:** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$ . Một mặt phẳng  $(P)$  cắt các cạnh  $SA, SB, SC, SD$  lần lượt tại  $A', B', C', D'$ . Gọi  $O$  là giao 2 đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Chứng minh rằng các đường thẳng  $A'C', B'D'$  và  $SO$  đồng quy.

**Giải**

Gọi  $I$  là giao điểm của hai đường thẳng  $A'C'$  và  $B'D'$ . Khi đó  $I$  thuộc  $A'C'$  nên  $I$  thuộc  $mp(SAC)$ ;  $I$  thuộc  $B'D'$  nên  $I$  thuộc  $mp(SBD)$ .

Do đó  $I$  thuộc giao tuyến  $SO$  của hai mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(SBD)$ . Vậy ba đường thẳng  $SO, A'C', B'D'$  đồng quy tại  $I$ .



**Ví dụ 7:** Cho tứ giác  $ABCD$  nằm trong mặt phẳng  $(\alpha)$  có hai cạnh  $AB$  và  $CD$  không song song. Gọi  $S$  là một điểm nằm ngoài mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $SC$ .

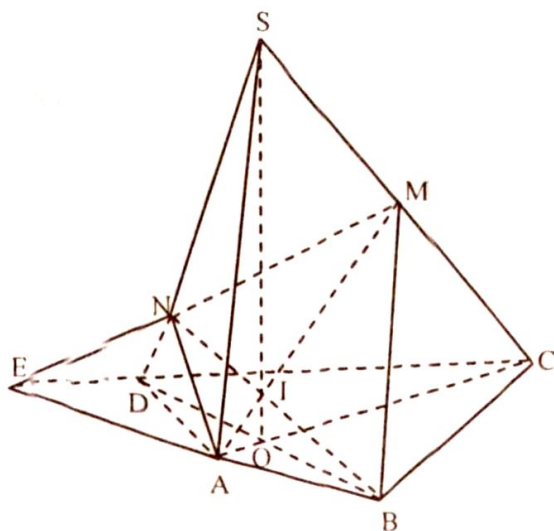
a) Tìm giao điểm  $N$  của đường thẳng  $SD$  và mặt phẳng  $(MAB)$ .

b) Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Chứng minh rằng ba đường thẳng  $SO, AM$  và  $BN$  đồng quy.

**Giải**

a) Gọi  $E$  là giao điểm của  $AB$  và  $CD$ . Hai mặt phẳng  $(MAB)$  và  $(SCD)$  có hai điểm chung là  $M$  và  $E$ . Do đó hai mặt phẳng này có  $ME$  là giao tuyến. Trong mặt phẳng  $(MCD)$ , gọi  $N$  là giao điểm của  $SD$  và  $EM$ , ta có  $N$  là giao điểm của đường thẳng  $SD$  và mặt phẳng  $(MAB)$ .

b) Gọi  $I$  là giao điểm của  $AM$  và  $BN$ . Như vậy điểm  $I$  vừa thuộc mặt phẳng  $(SAC)$  vừa thuộc mặt phẳng  $(SBD)$ . Mặt khác  $SO$  là giao tuyến của  $(SAC)$  và  $(SBD)$ . Do đó ba đường thẳng  $SO, AM$  và  $BN$  đồng quy tại  $I$ .



ABC



**Ví dụ 8:** Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, BC, AD, AC, BD.

a) Chứng minh MPNQ là hình bình hành.

b) Chứng minh ba đoạn thẳng MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn. Điểm đồng quy gọi là trọng tâm tứ diện.

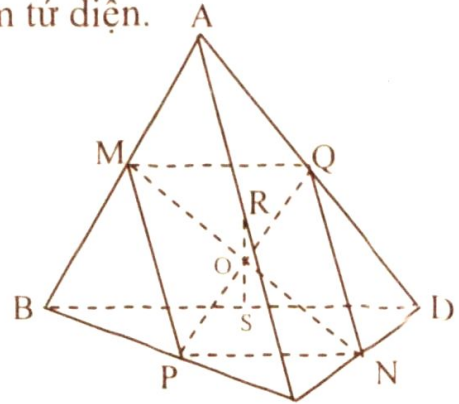
**Giải**

a) Ta có các đường trung bình MQ và PN đều song song với BD và bằng  $\frac{BD}{2}$  nên

MPNQ là hình bình hành.

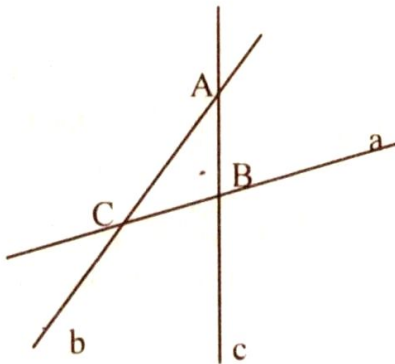
b) Vì MPNQ là hình bình hành nên hai chéo MN và PQ cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn.

Tương tự, MRNS là hình bình hành nên MN và RS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn, tức là tại O. Vậy MN, PQ và RS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.



**Ví dụ 9:** Chứng minh trong không gian, nếu có ba đường thẳng đôi một cắt nhau và không đồng phẳng thì chúng đồng quy.

**Giải**



Cho ba đường thẳng a, b, c đôi một cắt nhau. Gọi A là giao điểm của b và c. Ta chứng minh đường thẳng a qua giao điểm A

Giả sử a không qua điểm A thì a cắt b, c tại B, C khác điểm A.

Do đó, ba đường thẳng a, b, c cùng nằm trên mặt phẳng (ABC): vô lý.

Vậy chúng đồng quy.

Mở rộng: Nếu có n đường thẳng đôi một cắt nhau và không cùng nằm trên một mặt phẳng thì n đường thẳng đó cùng đi qua một điểm.

**Ví dụ 10:** Cho tứ diện ABCD có các cạnh thỏa mãn  $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$ .

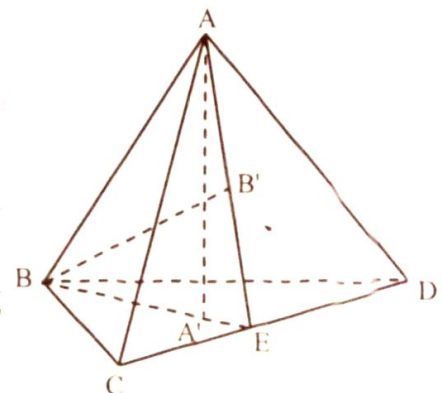
Chứng minh các đường thẳng đi qua mỗi đỉnh và tâm đường tròn nội tiếp các mặt đối diện đồng quy tại 1 điểm.

**Giải**

Gọi A', B', C', D' là tâm đường tròn nội tiếp của mặt đối diện các đỉnh A, B, C, D.

Vì AA', BB', CC', DD' không đồng phẳng nên ta chứng minh chúng đôi một cắt nhau.

Gọi  $E = BA' \cap CD$ . Vì BE là phân giác trong của tam giác BCD nên  $\frac{EC}{ED} = \frac{BC}{BD}$ .





Ta có  $AC.BD = AD.BC$  nên  $\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD}$  suy ra  $\frac{EC}{ED} = \frac{AC}{AD}$ , do đó AE là phân giác trong của tam giác ACD nên B' thuộc AE. Vậy AA' cắt BB' trong mp(ABE).

Chúng minh tương tự thì chúng đôi một cắt nhau và không đồng phẳng nên 4 đường thẳng đó đồng quy.

#### DẠNG 4: TOÁN TỔNG HỢP

##### • Yếu tố cố định:

- Đường thẳng cố định khi nó đi qua 2 điểm cố định phân biệt, hoặc nó là giao tuyến của 2 mặt phẳng cố định cắt nhau.

- Mặt phẳng cố định khi nó đi qua 3 điểm cố định không thẳng hàng, hoặc nó đi qua 1 đường thẳng cố định và một điểm cố định ở ngoài nó, hoặc nó đi qua 2 đường thẳng cố định cắt nhau.

Chú ý: Giả thiết yếu tố cố định, yếu tố di động.

##### • Quỹ tích (tập hợp) các giao điểm của 2 đường thẳng lưu động:

- Tìm 2 mặt phẳng phân biệt, cố định lần lượt chứa 2 đường thẳng, giao điểm thuộc giao tuyến cố định của 2 mặt phẳng đó.

- Giới hạn và phân đảo.

**Ví dụ 1:** Trên mặt phẳng  $(\alpha)$  cho hai đường thẳng a, b cắt nhau tại O. Gọi c là một đường thẳng cắt  $(\alpha)$  tại điểm I khác với O.

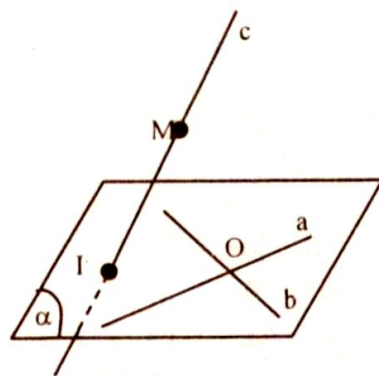
a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng  $(O; c)$  và  $(\alpha)$ .

b) Gọi M là một điểm lấy trên c nhưng không trùng với I. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng  $(M; a)$  và  $(M; b)$ . Chứng minh khi M di động trên c thì giao tuyến của hai mặt phẳng trên luôn luôn nằm trong một mặt phẳng cố định.

##### Giải

a) Hai mặt phẳng  $(O; c)$  và  $(\alpha)$  có hai điểm chung là O và I nên giao tuyến của chúng là đường thẳng OI.

b) Hai mặt phẳng  $(M; a)$  và  $(M; b)$  có hai điểm chung là M và O nên giao tuyến của chúng là đường thẳng MO. Khi M di động trên c, giao tuyến MO này luôn luôn nằm trong mặt phẳng  $(O; c)$  cố định.



**Ví dụ 2:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình thang, AB là đáy lớn. Điểm M lưu động trên cạnh SA.

a) Tìm giao điểm N của SD với mp(MBC).

b) Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

ABC



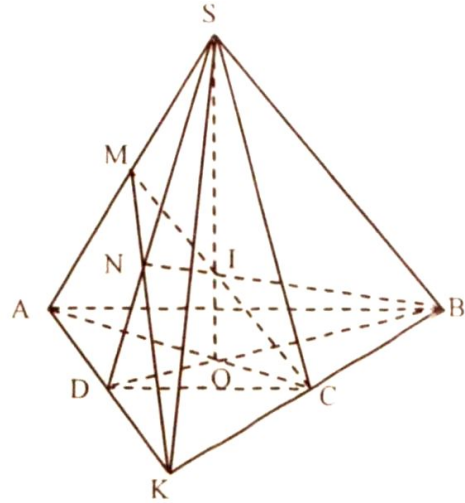
**Giải**

- a) Trong  $mp(ABCD)$ ,  $AC$  cắt  $BD$  tại  $O$ .  
 Trong  $mp(SAC)$ ,  $SO$  cắt  $MC$  tại  $I$ .  
 Trong  $mp(SBD)$ ,  $BI$  cắt  $SD$  tại  $N$  thì  
 $N = SD \cap (MBC)$ .

- b) Trong  $mp(ABCD)$ ,  $AD \cap BC = K$  cố định.

Ta có  $M, N, K$  thuộc 2 mặt phẳng phân biệt  $(SAD)$ ,  $(MBC)$  nên chúng thẳng hàng trên giao tuyến.

Vậy  $MN$  đi qua  $K$  cố định.



**Ví dụ 3:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $BD$ ;  $P$  là một điểm thay đổi trên đoạn thẳng  $AD$ .

- a) Xác định giao điểm  $Q$  của  $mp(MNP)$  và cạnh  $AC$ . Chứng minh thiết diện  $MNPQ$  là hình thang khi  $P$  khác  $A$  và  $D$ .  
 b) Tìm quỹ tích giao điểm  $I$  của  $QM$  và  $PN$ .  
 c) Tìm quỹ tích giao điểm  $J$  của  $QN$  và  $PM$ .

**Giải**

- a) Vẽ đường thẳng qua  $P$  song song với  $CD$  cắt  $AC$  tại  $Q$  thì  $Q$  là giao điểm của  $AC$  và  $mp(MNP)$ . Ta có  $PQ \parallel MN$  nên thiết diện  $MNPQ$  là hình thang.

- b) Giả sử  $I$  là giao điểm của  $QM$  và  $PN$ .

Ta có:  $QM \subset mp(ABC)$  cố định.

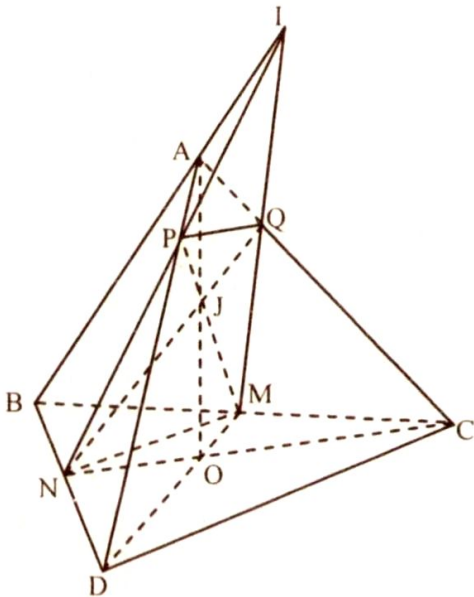
$PN \subset mp(ABD)$  cố định nên giao điểm  $I$  thuộc giao tuyến  $AB$  cố định.

Vì  $P$  thay đổi trên đoạn thẳng  $AD$  nên  $I$  chỉ nằm trên phần của đường thẳng  $AB$  trừ đi các điểm trong của đoạn  $AB$ .

Đảo lại, lấy một điểm  $I$  bất kì thuộc đường thẳng  $AB$  nhưng không nằm giữa  $A$  và  $B$ . Gọi  $P, Q$  lần lượt là các giao điểm của  $IN$  với  $AD$ , của  $IM$  với  $AC$ . Khi đó  $mp(MNP)$  cắt  $AC$  tại  $Q$  và giao điểm của  $QM$  và  $PN$  là  $I$ . Vậy quỹ tích giao điểm  $I$  của  $QM$  và  $PN$  là phần đường thẳng  $AB$  trừ đi các điểm trong của đoạn  $AB$ .

- c) Ta có  $QN \subset mp(NAC)$  cố định

$PM \subset mp(MAD)$  cố định nên giao điểm  $J$  thuộc giao tuyến  $AO$  cố định với  $O = CN \cap DM$ . Từ đó thì quỹ tích giao điểm  $J$  của  $QN$  và  $PM$  là đoạn thẳng  $AO$ .



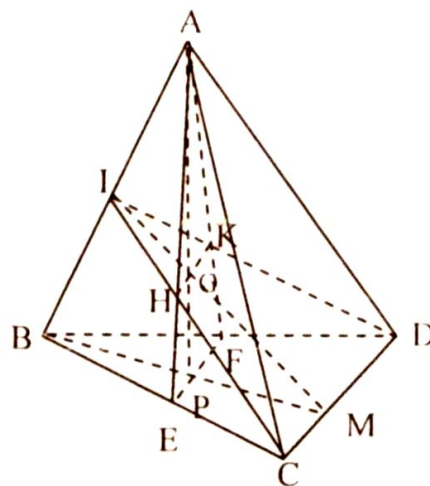


**Ví dụ 4:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I$  là trung điểm của cạnh  $AB$ ,  $M$  là một điểm di động trên cạnh  $CD$ .  $P$  là trung điểm của đoạn  $BM$ .

- Chứng minh rằng  $IM$  và  $AP$  mỗi đường nằm trong một mặt phẳng cố định khi  $M$  di động trên cạnh  $CD$ .
- Tìm tập hợp các giao điểm  $G$  của  $IM$  và  $AP$ .

**Giải**

- Vì  $I, C, D$  cố định nên  $IM$  nằm trong mặt phẳng cố định  $(ICD)$ . Vì  $P$  là trung điểm của đoạn  $BM$  nên khi  $M$  di động trên đoạn  $CD$  thì  $P$  di động trên đường trung bình  $EF$  của tam giác  $BCD$ , trong đó  $E, F$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $BD$ . Từ đó suy ra  $AP$  nằm trong mặt phẳng cố định  $(AEF)$ .



- $(ABC): H = AE \cap IC$  và  $(ABD): K = AF \cap ID$   
Thì  $H, K$  là điểm chung của hai mặt phẳng  $(ICD), (AEF)$  nên giao tuyến là đường thẳng  $HK$ .  
Vì  $G$  thuộc 2 mặt phẳng đó nên  $G$  thuộc đường thẳng  $HK$  là giao tuyến của mặt phẳng cố định nói trên.

**Ví dụ 5:** Cho hai hình thang (không bình hành)  $ABCD$  và  $ABEF$  có chung đáy lớn  $AB$  và không cùng nằm trong một mặt phẳng.

- Xác định giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:  $(AEC)$  và  $(BFD)$ ;  $(BCE)$  và  $(ADF)$ .
- Lấy một điểm  $M$  trên đoạn  $DF$ . Tìm giao điểm của đường thẳng  $AM$  với mặt phẳng  $(BCE)$ .
- Chứng minh hai đường thẳng  $AC$  và  $BF$  là hai đường thẳng không cắt nhau.

**Giải**

- Gọi  $G = AC \cap BD$

$$H = AE \cap BF.$$

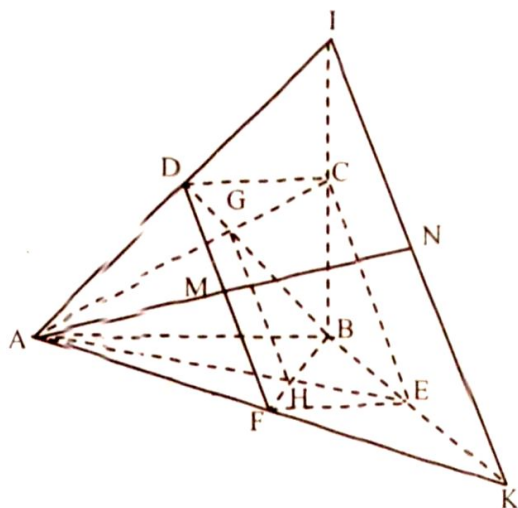
Hai mặt phẳng  $(AEC)$  và  $(BFD)$  có hai điểm chung là  $G$  và  $H$ . Vậy  $GH$  là giao tuyến của hai mặt phẳng trên.

$$\text{Gọi } I = AD \cap BC$$

$K = AF \cap BE$  thì suy ra  $IK$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(BCE)$  và  $(ADF)$ .

- Trong mặt phẳng  $(AIK)$ ,  $AM$  cắt  $IK$  tại  $N$ . Ta có  $N$  là giao điểm của  $AM$  với mặt phẳng  $(BCE)$ .

- Giả sử nếu  $AC$  và  $BF$  cắt nhau, ta suy ra hai hình thang đã cho nằm trong cùng một mặt phẳng là trái với giả thiết.





**Ví dụ 6:** Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD, lấy điểm K sao cho  $BK = 2KD$ .

- Tìm giao điểm E và F của đường thẳng CD và AD với mặt phẳng (IJK). Chứng minh  $DE = DC$ ,  $FA = 2FD$  và  $FK // IJ$
- Gọi M và N là hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai cạnh AB và CD. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (IJK).

**Giải**

- Trong (BCD), CD cắt JK tại E nên E là giao điểm của CD với (IJK). Trong tam giác BCD, dựng  $DD' // JK$ .

$$\text{Vì } KD = \frac{1}{2} KB \text{ nên } JD' = \frac{1}{2} JB.$$

$$\text{Vì } JB = JC \text{ nên } JD' = \frac{1}{2} JC.$$

Suy ra:  $D'J = D'C$ .

Do đó:  $DE = DC$

Trong (ACD), AD cắt IE tại F. Đây là giao điểm của AD với (IJK). Trong tam giác ACE, AD và EI là hai trung tuyến, nên F là trọng tâm.

Do đó  $FA = 2FD$ . Vì K và F là trọng tâm các tam giác BCE và ACE nên

$$\text{ta có: } \frac{KE}{KJ} = \frac{FE}{FI} = 2$$

Trong tam giác IJE, hệ thức trên suy ra  $FK // IJ$

- MC cắt IJ tại P, MD cắt FK tại Q thì PQ là giao tuyến của  $mp(MCD)$  và  $mp(IJK)$

Trong (MCD), MN cắt PQ tại O, đây là giao điểm của MN với (IJK).

**Ví dụ 7:** Cho hình chóp tam giác S.ABC. Trong các miền tam giác SAB, SBC, SCA lần lượt lấy các điểm L, M, N sao cho các đường thẳng LM, MN, NL đều cắt mp(ABC).

- Xác định các giao điểm I, J, K của mặt phẳng (ABC) theo thứ tự với các đường thẳng LM, MN, NL.
- Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.
- Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(LMN).

**Giải**

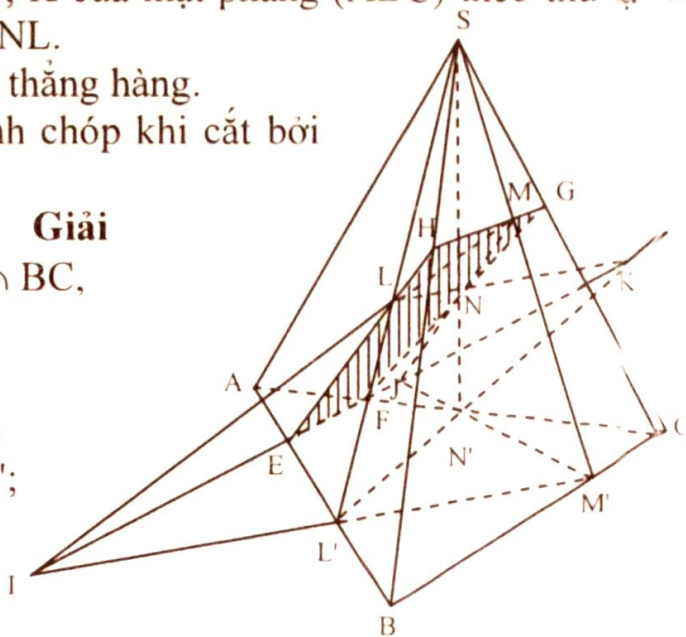
- Gọi  $L' = SL \cap AB$ ,  $M' = SM \cap BC$ ,  
 $N' = SN \cap CA$ .

Trong các mặt phẳng:

$$mp(SLM): I = ML \cap M'L';$$

$$mp(SNM): J = NM \cap N'M';$$

$$mp(SNL): K = LN \cap L'N'.$$





Đó là các giao điểm I, J, K cần tìm.

- b) Các điểm I, J, K đều cùng thuộc hai mặt phẳng (MNL) và (M'N'L') nên chúng thẳng hàng trên giao tuyến.
- c) Giả sử đường thẳng IK cắt AB, AC theo thứ tự tại E, F. Khi đó  $G = FN \cap SC$ ,  $H = GM \cap SB$  và do E, L, H thẳng hàng nên tứ giác EFGH là thiết diện cần dựng. Thiết diện có thể là tứ giác hoặc tam giác phụ thuộc vào đường thẳng IK cắt hai cạnh của  $\triangle ABC$  hoặc phần kéo dài của chúng.

**Ví dụ 8:** Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và SC.

a) Xác định các giao điểm I và J của mp(SBD) theo thứ tự với các đường thẳng AN và MN.

b) Chứng minh ba điểm B, I, J thẳng hàng.

c) Tính các tỉ số  $\frac{IA}{IN}$ ;  $\frac{JM}{JN}$ ;  $\frac{IB}{IK}$ .

**Giải**

a) Gọi O là tâm hình bình hành ABCD.

Trong  $\triangle SAC$ , AN cắt SO tại I. Vậy I là giao điểm của AN và mp(SBD).

Trong  $\triangle NAB$ , MN cắt BI tại J. Vậy J là giao điểm của MN và mp(SBD).

b) Theo cách vẽ câu a) thì B, I, J thẳng hàng.

c) Vì I là trọng tâm của tam giác SAC nên  $\frac{IA}{IN} = 2$ . Gọi M' là trung điểm

AI thì  $MM' \parallel BJ$ , và J là trung điểm của MN nên  $\frac{JM}{JN} = 1$ .

Ta có:  $IB = 2MM'$ ,  $IJ = \frac{1}{2}MM'$ . Vậy  $\frac{JB}{IJ} = 4$ .

**Ví dụ 9:** Trong mp(P) cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại I. Ngoài mp(P) cho hai điểm M, N sao cho đường thẳng MN cắt (P) tại O và O không nằm trên a và b. Một đường thẳng c thay đổi đi qua O cắt a, b lần lượt tại A và B. Gọi A' là giao điểm của AN và BM, B' là giao điểm của AM và BN.

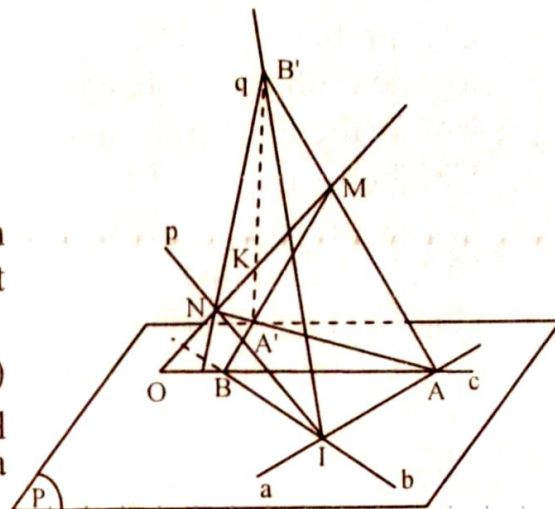
a) Tìm quỹ tích A' và B'.

b) Chứng minh rằng đường thẳng A'B' luôn đi qua một điểm cố định.

**Giải**

a) Ta có  $A' \in mp(M; b)$  và  $A' \in mp(N; a)$  nên quỹ tích A' là giao tuyến p của hai mặt phẳng cố định: mp(M; b) và mp(N; a).

Ta có:  $B' \in mp(M; a)$  và  $B' \in mp(N; b)$  nên tương tự quỹ tích B' là giao tuyến q của hai mặt phẳng cố định: mp(M; a) và mp(N; b).





- b) Trong  $mp(A'B'; MN)$  đường thẳng  $A'B'$  cắt  $MN$  tại  $K$ . Điểm  $K$  cũng chính là giao điểm của  $mp(p; q)$  cố định và đường thẳng  $MN$  cố định nên  $K$  cố định.

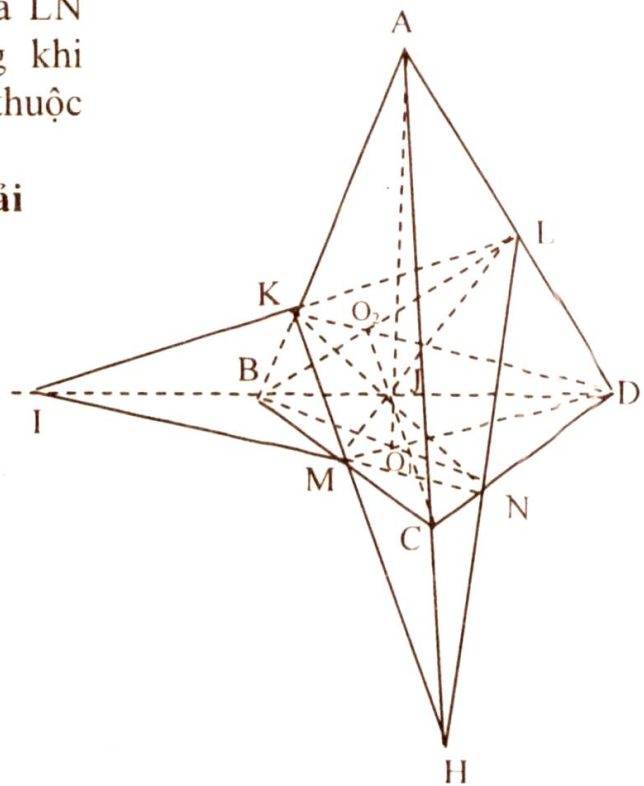
Vậy  $A'B'$  luôn luôn đi qua  $K$  cố định.

**Ví dụ 10:** Cho 4 tứ diện  $ABCD$ , gọi  $I$  là điểm nằm trên đường thẳng  $BD$  nhưng không thuộc đoạn  $BD$ . Trong mặt phẳng  $(ABD)$ , vẽ đường thẳng qua  $I$  và cắt hai đoạn  $AB$ ,  $AD$  lần lượt tại  $K$  và  $L$ . Trong mặt phẳng  $(BCD)$ , vẽ đường thẳng qua  $I$  và cắt hai đoạn  $CB$  và  $CD$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ .

- a) Gọi  $O_1$  là giao điểm của hai đường thẳng  $BN$  và  $DM$ ,  $O_2$  là giao điểm của hai đường thẳng  $BL$  và  $DK$ , và  $J$  là giao điểm của hai đường thẳng  $LM$  và  $KN$ . Chứng minh ba điểm  $A, J, O_1$  và  $C, J, O_2$  thẳng hàng.
- b) Giả sử hai đường thẳng  $KM$  và  $LN$  cắt nhau tại  $H$ . Chứng minh rằng khi điểm  $I$  thay đổi thì điểm  $H$  thuộc đường thẳng cố định.

**Giải**

- a) Ba điểm  $A, J, O_1$  thẳng hàng vì chúng cùng thuộc hai mặt phẳng  $(ABN)$  và  $(ADM)$ . Tương tự ba điểm  $C, J, O_2$  thẳng hàng vì chúng cùng thuộc  $(BCL)$  và  $(CDK)$ .
- b)  $A, C, H$  là ba điểm thẳng hàng, vì cùng thuộc hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(ADC)$ .  
Do đó  $H$  thuộc đường thẳng  $AC$  cố định.



### C. BÀI LUYỆN TẬP

- Cho tứ diện  $ABCD$ .
  - Xác định các đỉnh, cạnh, mặt.
  - Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $AD$  thì điểm  $M$  thuộc mặt phẳng nào ?
- Cho hình chóp  $S.ABCD$ .
  - Xác định các đỉnh, cạnh, mặt.
  - Xét vị trí tương đối của  $SA$  và  $DC$ ;  $AD$  và  $BC$ .
- Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ .
  - Xác định các đỉnh, cạnh, mặt, đường chéo, mặt chéo.
  - Chứng minh tam giác  $AB'D'$  đều.
- Chứng minh 1 mặt phẳng và 1 đường thẳng không nằm trên mặt phẳng đó thì có không quá 1 điểm chung.



**HD:** dùng phản chứng

5. Mệnh đề nào đúng:

- a) Ba đường thẳng mà 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau thì chúng đồng quy.
- b) Hai đường thẳng nằm trên 2 mặt song song thì không có điểm chung.
- c) Ba điểm nằm trên 2 mặt phẳng phân biệt thì thẳng hàng.
- d) Từ 4 điểm không đồng phẳng thì có 3 điểm không đồng phẳng.

**ĐS:** a) S b) Đ c) Đ d) S

6. Cho  $n$  điểm,  $n \geq 4$  mà không có 4 điểm nào đồng phẳng. Chứng minh không có 3 điểm nào thẳng hàng.

7. Cho 7 điểm mà 4 điểm nào cũng đồng phẳng. Chứng minh tất cả 7 điểm đều thuộc 1 mặt phẳng.

8. Cho 2 đường thẳng chéo nhau  $a$  và  $b$ . Trên  $a$  lấy 2 điểm phân biệt  $A, B$  và trên  $b$  lấy 2 điểm phân biệt  $C, D$ .

a) Chứng minh  $AD$  và  $CB$  chéo nhau.

b)  $M$  trên  $AC$ ,  $N$  trên  $BD$  thì  $MN$  có song song với  $AB$  ?  $CD$ ?

c) Lấy  $O$  trên  $MN$ . Chứng minh  $AO$  cắt  $CN$ ,  $BO$  cắt  $DM$ .

**ĐS:** b) không song song

9. Cho tứ diện  $ABCD$ ,  $O$  là điểm trong tam giác  $BCD$ , điểm  $M$  trên  $AO$ .

a) Tìm giao tuyến của  $(MCD)$  với  $(ABC)$ ;  $(ABD)$ .

b)  $I$  và  $J$  thuộc  $BC, BD$ . Tìm giao tuyến  $(IJM)$  và  $(ACD)$ .

**HD:** dùng đường giống từ đỉnh  $S$

10. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tìm giao tuyến của các mặt phẳng:

a)  $(AA', CC')$  và  $(BB', DD')$ .

b)  $(BDC')$  với 2 đáy

11. Cho tứ diện  $ABCD$ . Trên  $AC, AD$  lần lượt lấy  $M, N$  sao cho  $MN$  không song song  $CD$ . Gọi  $O$  là điểm trong tam giác  $BCD$ .

a) Tìm giao điểm của  $MN$  với  $CD$ , với  $(BCD)$

b) Tìm giao điểm của  $BC, BD$  với  $(OMN)$ .

12. Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  là điểm trong tam giác  $ABC, BCD$ . Tìm giao điểm của  $MN$  với  $(ACD)$ .

**HD:** dùng đường giống từ đỉnh  $B$

13. Cho hình chóp  $S.ABCD$ ,  $M$  trên cạnh  $SC$ .

a) Tìm giao điểm  $AM$  với  $(SBD)$ .

b) Điểm  $N$  trên  $BC$ . Tìm giao điểm của  $SD$  với  $(AMN)$ .

14. Cho hình bình hành  $ABCD$  nằm trong  $(P)$  và  $S$  ở ngoài  $(P)$ . Lấy  $M$  thuộc đoạn  $SA$ ,  $N$  thuộc đoạn  $SB$ . Hai đường chéo  $AC, BD$  cắt nhau tại  $O$ .

a) Tìm giao điểm của  $(CMN)$  với  $SO$ .

b) Tìm giao tuyến của  $(SAD)$  và  $(CMN)$ .

15. Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy hình thang có đáy lớn  $AB$ . Gọi  $I, J, K$  lần lượt trên  $SA, AB, BC$ . Tìm giao điểm của:

a) đường thẳng  $IK$  với  $(SBD)$



- b) đường thẳng  $SD, SC$  với  $(IJK)$ .
16. Cho 2 hình thang không là hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  chung đáy lớn  $AB$  và không đồng phẳng.
- Tìm giao tuyến  $(AEC)$  và  $(BFD)$ ;  $(BCE)$  và  $(ADF)$
  - Lấy  $M$  thuộc  $DF$ . Tìm giao điểm  $AM$  với  $(BCE)$ .
  - Chứng minh  $AC$  và  $BF$  không cắt nhau.
- HD:** a) giao tuyến là đường thẳng đi qua 2 giao điểm của các cặp đường thẳng
17. Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Lấy  $D'$  trên  $SD$ . Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng  $(ABD')$  bằng 3 cách.
18. Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Lấy  $M$  trong tam giác  $SAB$ . Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng  $(MCD)$ .
19. Cho hình chóp  $S.ABCD$ ,  $M$  thuộc miền trong tam giác  $SCD$ .
- Tìm giao tuyến của  $(SBM)$  và  $(SAC)$ .
  - Tìm giao điểm của đường thẳng  $MB$  với  $(SAC)$ .
  - Tìm thiết diện cắt hình chóp bởi  $(ABM)$ .
- HD:** dùng đường giống
20. Cho hình chóp  $S.ABCD$ , đường thẳng  $\Delta$  song song với  $BD$  và thuộc mặt đáy. Gọi  $M$  là trung điểm  $SA$ . Tìm thiết diện cắt bởi  $mp(M, \Delta)$  tùy theo các vị trí của  $\Delta$ .
21. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là tứ giác lồi. Xác định thiết diện qua  $SA$  và chia đáy thành 2 phần có diện tích bằng nhau.
- HD:** gọi  $I$  là trung điểm của  $BD$ , vẽ đường thẳng qua  $I$ , song song với  $AC$  cắt  $CD$  tại  $J$  thì mặt phẳng cần tìm là mặt phẳng  $(SAJ)$
22. Cho tứ diện đều  $ABCD$  có 6 cạnh bằng  $a$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AD$ ,  $J$  và  $K$  là điểm đối xứng với  $D$  qua  $C$  và  $B$ .
- Xác định thiết diện cắt bởi  $(IJK)$
  - Tính diện tích thiết diện.
23. Cho hình chóp  $S.ABCD$ ,  $AC$  cắt  $BD$  tại  $O$ . Gọi  $M, N, I$  là 3 điểm trên  $AD, CD, SO$ . Tìm thiết diện cắt bởi  $(MNI)$ .
24. Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $H, K$  là trung điểm của  $CA, CB$  và điểm  $M$  thuộc tam giác  $BCD$ . Biện luận thiết diện cắt tứ diện bởi  $(MHK)$ .
25. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng đi qua 3 trung điểm:
- $I, J, K$  của 3 cạnh liên tiếp  $B'B, BA, AD$ .
  - $M, N, P$  của 3 cạnh  $AB, B'C', DD'$ .
- HD:** b) giống song song với cạnh  $AA'$
26. Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Một mặt phẳng cắt 4 cạnh bên tại  $A', B', C', D'$ . Gọi  $O, O'$  là giao điểm 2 đường chéo tứ giác  $ABCD, A'B'C'D'$ . Chứng minh  $S, O, O'$  thẳng hàng.
- HD:** 3 điểm cùng nằm trên 2 mặt phẳng phân biệt



27. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Trên 4 cạnh bên lấy 4 điểm M, N, P, Q sao cho chúng đồng phẳng. Gọi E, F, G, H là giao điểm của các đường thẳng MN, NP, PQ, QM với mặt phẳng  $(A'B'C'D')$ .
- Chứng minh E, F, G, H thẳng hàng.
  - Giao điểm của MP với  $(A'B'C'D')$  có thuộc đường này không?
28. Cho hình chóp S.ABCD. Điểm M trên BC, N trên SD.
- Tìm giao điểm I của BN, J của MN với (SAC).
  - DM cắt AC tại K. Chứng minh S, K, J thẳng hàng.
  - Xác định thiết diện cắt bởi (BCN).
29. Cho tứ diện ABCD, gọi G là trọng tâm tam giác ACD. Lấy M, N, P thuộc các đoạn AB, CA, DA sao cho  $\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NA} = \frac{PD}{PA} = \frac{1}{2}$
- Gọi I, J là giao điểm của MN với BC, MP với BD.
- Chứng minh MG, PI, NJ đồng phẳng
  - Gọi E, F là trung điểm của CD, NI; H là giao điểm của MG với BE, K là giao điểm của GF với (BCD). Chứng minh H, K, I, J thẳng hàng.
30. Cho 4 đường thẳng đôi một cắt nhau và không đồng phẳng. Chứng minh chúng đồng quy.
- HD:** dùng cách chứng minh đồng quy liên tiếp, kết hợp với phản chứng
31. Cho n đường thẳng,  $n \geq 4$  đôi một cắt nhau và không đồng phẳng. Chứng minh chúng đồng quy.
32. Cho hình chóp S.ABCD có đáy không là hình thang. Trên cạnh SC lấy điểm E.
- Tìm giao điểm F của SD với (ABE).
  - Chứng minh 3 đường thẳng AB, CD, EF đồng quy.
- HD:** b) chuyển qua thẳng hàng
33. Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F, G lần lượt là 3 điểm trên AB, AC, BD sao cho đường thẳng EF cắt BC tại I, EG cắt AD tại H. Chứng minh CD, IG, HF đồng quy.
- HD:** Chứng minh các đường thẳng đôi một cắt nhau và không đồng phẳng.
34. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi I, J là 2 điểm trên AD, SB.
- Tìm các giao điểm K, L của IJ, DJ với (SAC).
  - Cho AD cắt BC tại O, OJ cắt SC tại M. Chứng minh 4 điểm A, K, L, M thẳng hàng.
- HD:** 4 điểm cùng nằm trên 2 mặt phẳng phân biệt
35. Cho A, B nằm ngoài mặt phẳng (P) sao cho AB không song song (P). Điểm M lưu động trong không gian sao cho MA, MB cắt (P) tại A', B'. Chứng minh đường thẳng A'B' đi qua 1 điểm cố định.
- ĐS:** qua giao điểm của đường thẳng AB với mp(P)



36. Trên mặt phẳng (Q) cho 2 tia song song  $Ax, By$ . Hai điểm lưu động M trên Ax, N trên By khác A, B. Điểm O cố định không thuộc (Q).
- Chứng minh OA, MN chéo nhau.
  - Gọi I trung điểm MN. Chứng minh OI nằm trên 1 mặt phẳng cố định.
- HD:** b) dùng đường thẳng song song và cách đều Ax, By
37. Cho hình chóp S.ABCD. Một mặt phẳng lưu động qua 2 trung điểm I, J của SA, SC. Mặt phẳng này cắt SB, SD tại M, N. Chứng minh MN đi qua 1 điểm cố định.
- DS:** giao điểm của IJ với mp(SBD)
38. Cho hình chóp S.ABCD đáy không có cặp cạnh song song. M lưu động trên cạnh SB.
- Tìm giao điểm N của SC với mp(ADM).
  - Tìm tập hợp giao điểm E của AN và DM.
39. Cho tứ diện ABCD. I, J trên AB, AC mà IJ không song song với BC. Mặt phẳng lưu động qua IJ cắt CD, DB lần lượt tại M, N.
- Chứng minh MN đi qua 1 điểm cố định.
  - Tìm tập hợp giao điểm của IN và JM; IM và JN.
40. Cho hình chóp S.ABC. Một mặt phẳng  $(\alpha)$  lưu động qua A cắt cạnh SB, SC tại B', C'. Chứng minh nếu  $\frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 4$  thì mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa 1 đường thẳng cố định.
- HD:** gọi I là trung điểm của BC và I' là trung điểm của B'C'
41. Cho hình chóp S.ABCD, AB và CD kéo dài cắt nhau tại E, AD và BC kéo dài cắt nhau tại F với  $AD < DF$ . Gọi I, J lần lượt là trung điểm SA, SB. Mặt phẳng lưu động qua IJ cắt SC, SD lần lượt tại M, N.
- Chứng minh IJ, MN, SE đồng quy.
  - Tìm tập hợp giao điểm của IM và JN.
  - Tìm tập hợp giao điểm của IN và JM.
- HD:** b) c) quỹ tích là các giao tuyến
42. Cho hình chóp S.ABC gọi G là trọng tâm đáy. Một mặt phẳng (L) lưu động cắt 3 cạnh bên tại A', B', C'. Chứng minh nếu  $\frac{SA}{SA'} + 2\frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 8$  thì mp(L) chứa 1 đường thẳng cố định.



43 Cho hình chóp  $S.ABC$ . Trên 3 cạnh bên lấy  $A', B', C'$  lưu động. Chứng minh nếu:  $SA = n.SA', SB = (n + 1)SB', SC = (n + 2)SC'$  thì mặt phẳng  $(A'B'C')$  chứa 1 đường thẳng cố định.

**HD:** vẽ hình bình hành  $SABI$  thì  $AB'$  qua  $I$  cố định

44 Cho lục giác gheñh  $ABCDEF$  có 3 cặp cạnh đối song song. Chứng minh 3 đường chéo đồng quy.

45 Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ .

a) Chứng minh 4 đường chéo đồng quy.

b) Tìm điểm  $G$  trong tam giác  $A'DB$  mà  $A, G, C'$  thẳng hàng.

**ĐS:** b)  $G$  là trọng tâm của tam giác  $A'DB$

46 Cho tứ diện  $SABC$ . Qua  $C$  dựng mặt phẳng  $(P)$  cắt  $AB, SB$  tại  $B', B''$ . Qua  $B$  dựng mặt phẳng  $(Q)$  cắt  $AC, SC$  tại  $C', C''$ . Đường thẳng  $BC''$  cắt  $CB''$  tại  $O', BC'$  cắt  $CB'$  tại  $O''$ . Giả sử  $O'O''$  cắt  $SA$  tại  $I$ .

a) Chứng minh  $AO'', SO', BC$  đồng quy.

b) Chứng minh  $I, B', B''$  và  $I, C', C''$  thẳng hàng.

47. Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $P, L, M, N, R, S$  lần lượt là trung điểm cạnh  $AB, CD, BC, DA, BD, CA$ . Từ điểm  $O$  bất kỳ trong không gian vẽ 6 đường thẳng: qua  $P, // OL$ ; qua  $L, // OP$ ; qua  $M, // ON$ ; qua  $N, // OM$ ; qua  $R, // OS$ ; qua  $S, // OR$ . Chứng minh 6 đường thẳng này đồng quy.

**ĐS:** điểm đối xứng của  $O$  qua trọng tâm  $G$

48. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Ba điểm lưu động  $M, N, P$  trên 3 cạnh bên  $AA', BB', CC'$ .

a) Xác định thiết diện  $MNPQ$  cắt bởi  $(MNP)$ .

b) Tìm quỹ tích giao điểm  $T$  của đường thẳng  $MP$  với  $(ABCD)$

**HD:** b) c) tìm 2 mặt phẳng cố định lần lượt chứa 2 đường thẳng lưu động thì giao điểm thuộc giao tuyến cố định.

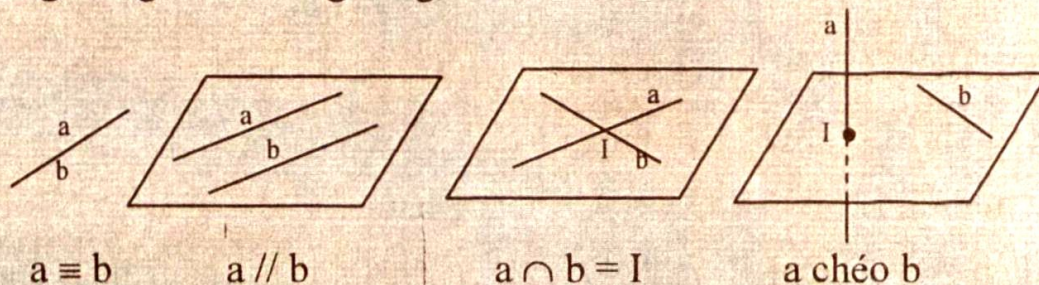


## §2. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

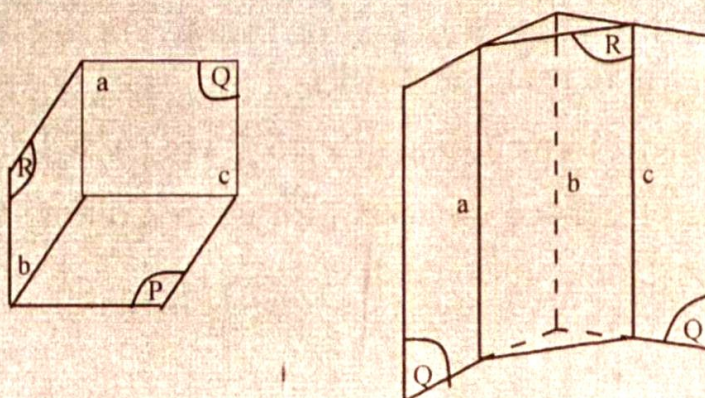
### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### • HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

- Hai đường thẳng gọi là đồng phẳng nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.
- Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng: có 4 vị trí tương đối là 2 đường thẳng trùng nhau, song song, cắt nhau và chéo nhau.



- Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- Định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng.  
Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.



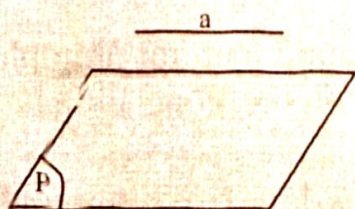
- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.
- Ba đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối diện của một tứ diện đồng quy tại trung điểm G của mỗi đoạn. Điểm G đó gọi là trọng tâm của tứ diện.



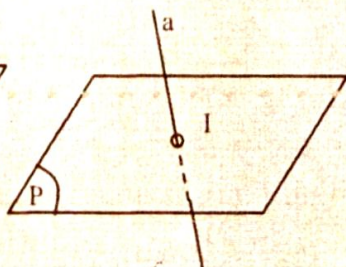
## • ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

- Một đường thẳng và một mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

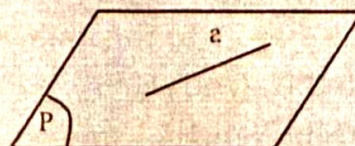
- Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng: Có 3 vị trí tương đối là đường thẳng song song mặt phẳng, đường thẳng cắt mặt phẳng và đường thẳng nằm trên mặt phẳng.



$$a // (P)$$



$$a \cap (P) = I$$

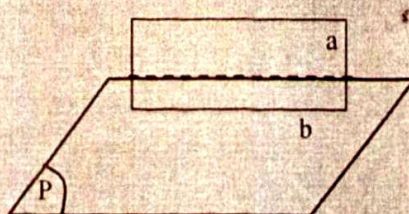
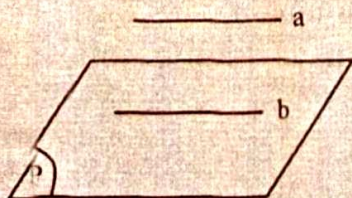


$$a \subset (P)$$

- Định lý cơ bản:

Nếu đường thẳng  $a$  không nằm trên mặt phẳng  $(P)$  và song song với một đường thẳng nào đó nằm trên  $(P)$  thì  $a$  song song với  $(P)$ .

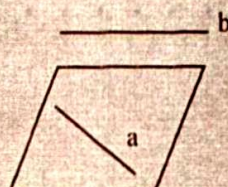
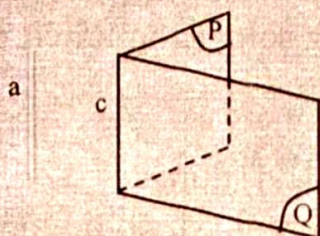
- Nếu đường thẳng  $a$  song song với mặt phẳng  $(P)$  thì mọi mặt phẳng  $(Q)$  chứa  $a$  mà cắt  $(P)$  thì cắt theo giao tuyến song song với  $a$ .



- Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó trong mặt phẳng.

- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó.

- Nếu  $a$  và  $b$  là hai đường thẳng chéo nhau thì có duy nhất một mặt phẳng chứa  $a$  và song song với  $b$ .





## B. PHÂN DẠNG TOÁN

### DẠNG 1: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

- Hai đường thẳng có 4 vị trí tương đối:

- Đồng phẳng: Trùng nhau, cắt nhau, song song.
- Không đồng phẳng: Chéo nhau.

Để chứng minh 2 đường chéo nhau ta thường sử dụng phương pháp phản chứng: Giả sử 2 đường thẳng không chéo nhau nên chúng đồng phẳng. Từ đó đưa về điều vô lý.

- Một đường thẳng và một mặt phẳng có 3 vị trí tương đối: đường thẳng nằm trên mặt phẳng, đường thẳng cắt mặt phẳng và đường thẳng song song với mặt phẳng.

Để chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng, ngoài cách dựa vào định lý cơ bản, ta có thể giả sử đường thẳng cắt mặt phẳng cho trước, từ đó suy ra điều vô lý. Hơn nữa nếu đường thẳng không thuộc mặt phẳng thì đường thẳng song song với mặt phẳng đó.

**Ví dụ 1:** Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

- Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung;
- Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau;
- Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau;
- Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

#### Giải

Dựa vào các định nghĩa về 2 đường thẳng thì mệnh đề:

- đúng và d) đúng.

**Ví dụ 2:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau;
- Nếu đường thẳng song song với một đường thẳng thuộc mặt phẳng thì đường thẳng song song với mặt phẳng đó;
- Một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì cắt đường thẳng còn lại;
- Một mặt phẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì cắt đường thẳng còn lại.

#### Giải

Dựa vào định nghĩa và định lý cơ bản thì mệnh đề d) đúng.

**Ví dụ 3:** Cho mp(P) và hai đường thẳng song song a, b. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau đây:

- Nếu (P) song song với a thì (P) cũng song song với b;



- b) Nếu (P) song song với a thì (P) song song với b hoặc chứa b;  
 c) Nếu (P) song song với a thì (P) chứa b;  
 d) Nếu (P) chứa a thì (P) có thể song song với b.

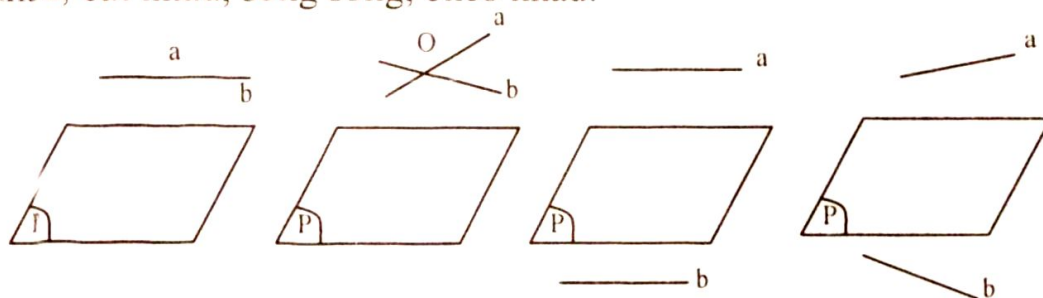
### Giải

Dựa vào định nghĩa và định lý cơ bản thì mệnh đề b) đúng và d) đúng.

**Ví dụ 4:** Cho hai đường thẳng a và b cùng song song với mp(P). Vị trí tương đối của a và b thế nào?

### Giải

Hai đường thẳng a và b có thể xảy ra một trong bốn trường hợp: trùng nhau, cắt nhau, song song, chéo nhau:



**Ví dụ 5:** Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AC lấy 2 điểm phân biệt M và N, trên cạnh BD lấy 2 điểm phân biệt E và F. Chứng minh 2 đường thẳng chéo nhau:

a) AB và CD.

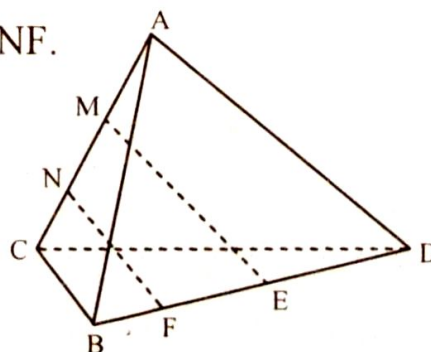
b) MF và NF.

### Giải

- a) Giả sử 2 đường thẳng AB và CD không chéo nhau thì AB và CD đồng phẳng nên có mặt phẳng (P) chứa 2 đường thẳng AB và CD. Từ đó thì 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng: vô lý.

Vậy AB và CD không đồng phẳng.

- b) Giả sử ME và NF đồng phẳng thì có một mặt phẳng chứa 2 đường thẳng này. Vì M, N thuộc AC và E, F thuộc BD nên 4 điểm A, B, C, D cũng đồng phẳng: vô lý. Vậy 2 đường thẳng ME và NF chéo nhau.



**Ví dụ 6:** Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Có hay không hai đường thẳng p, q song song với nhau, mỗi đường đều cắt cả a và b?

### Giải

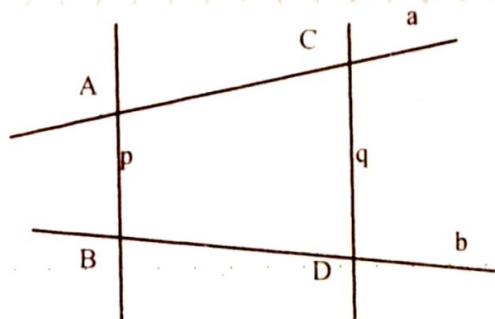
Giả sử tồn tại 2 đường thẳng p và q thỏa đề bài.

Đường thẳng p cắt a và b tại A và B; q cắt a và b tại C và D. Vì  $p \parallel q$  nên có mp(p; q) chứa bốn điểm A, C, B, D.

Ta có A và C đều thuộc mp(p, q) nên đường thẳng a thuộc mp(p; q).

Tương tự b cũng thuộc mp(p; q). Từ đó suy ra a và b đồng phẳng (trái giả thiết).

Vậy không có hai đường thẳng p, q song song với nhau và cắt cả a và b.

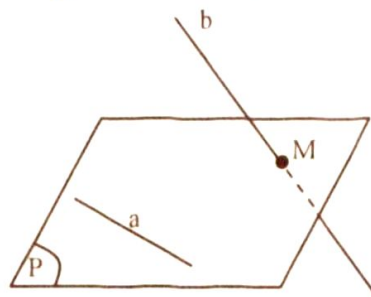




**Ví dụ 7:** Cho đường thẳng  $a \subset mp(P)$  và một đường thẳng  $b$  cắt  $(P)$  tại điểm  $M$ . Chứng minh rằng nếu  $a$  không đi qua  $M$  thì  $a$  và  $b$  là hai đường thẳng chéo nhau (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng chéo nhau).

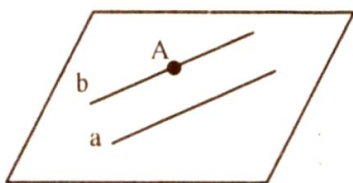
**Giải**

Giả sử  $a, b$  không chéo nhau khi đó  $a, b \subset (Q)$  và vì  $a \subset (Q), M \in (Q)$  và  $M$  không thuộc  $a$ , nên  $(Q) \equiv (P) \Rightarrow b \subset (P)$ , trái với giả thiết  $b$  cắt  $(P)$ . Vậy  $a, b$  chéo nhau.



**Ví dụ 8:** Chứng minh, trong không gian qua một điểm cho trước nằm ngoài đường thẳng thì có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

**Giải**



Giả sử  $A$  là một điểm nằm ngoài đường thẳng  $a$  cho trước. Theo tiên đề O-clit về đường thẳng song song thì trong  $mp(A; a)$  có duy nhất đường thẳng  $b$  đi qua  $A$  và song song với  $a$ .

Hiển nhiên nếu một đường thẳng đi qua  $A$  và không nằm trên  $mp(A; a)$  thì không thể song song với  $a$ . Vậy đường thẳng  $b$  là duy nhất.

**Ví dụ 9:** Chứng minh, hai đường thẳng phân biệt cũng song song với đường thẳng thứ ba thì 2 đường thẳng đó song song với nhau.

**Giải**

Cho ba đường thẳng  $a, b, c$  trong đó  $b$  và  $c$  phân biệt, đường thẳng  $b // a$  và đường thẳng  $c // a$ .

- Nếu  $mp(a; b)$  trùng với  $mp(a; c)$  thì theo hình học phẳng ta có đường thẳng  $b // c$ .

- Nếu  $mp(a; b)$  khác  $mp(a; c)$ , lấy một điểm  $C$  trên  $c$  và gọi  $c'$  là giao tuyến của  $mp(C; b)$  và  $mp(a; c)$ .

Giả sử  $c' // a$  thì  $c'$  phải trùng với  $c$ . Khi đó  $c // b$ , vì nếu  $c$  cắt  $b$  tại điểm  $I$  thì  $I \in mp(a; c)$  và  $I \in mp(a; b)$ , suy ra  $I$  phải thuộc đường thẳng  $a$  là giao tuyến của  $mp(a; c)$  và  $mp(a; b)$ . Vậy  $a$  và  $b$  cắt nhau tại  $I$ : vô lý.

Giả sử  $c'$  cắt  $a$  tại một điểm  $J$  thì khi đó  $J$  vừa thuộc  $mp(C; b)$  lại vừa thuộc  $mp(a; b)$  suy ra  $J$  thuộc giao tuyến  $b$  của  $mp(C; b)$  và  $mp(a; b)$ , tức  $a$  và  $b$  cắt nhau tại  $J$ : vô lý.

Tóm lại ta có  $b // c$ .

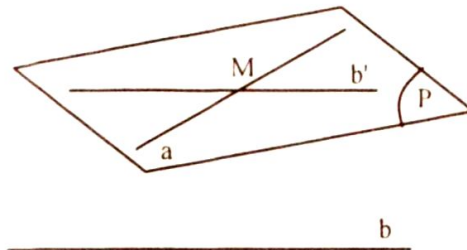


**Ví dụ 10:** Cho hai đường thẳng chéo nhau. Chứng minh có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

**Giải**

Lấy một điểm  $M$  nằm trên  $a$ . Vẽ qua  $M$  một đường thẳng  $b'$  song song với  $b$ . Khi đó, hai đường thẳng  $a$  và  $b'$  cắt nhau, xác định mp( $P$ ) song song với  $b$ .

Nếu có mặt phẳng ( $Q$ ) khác ( $P$ ) cũng đi qua  $a$  và song song với  $b$  thì  $a$  là giao tuyến của ( $P$ ) và ( $Q$ ) nên  $a \parallel b$ , trái với giả thiết. Vậy mp( $P$ ) là duy nhất.



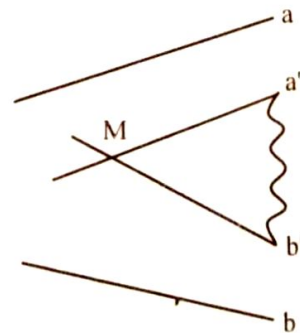
**Ví dụ 11:** Cho hai đường thẳng chéo nhau  $a$  và  $b$  và một điểm  $M$  không nằm trên  $a$  và  $b$ . Chứng minh rằng có một và chỉ một mặt phẳng đi qua  $M$  song song với cả  $a$  và  $b$  hoặc song song với một đường thẳng và chứa đường thẳng kia.

**Giải**

Gọi  $a'$ ,  $b'$  là những đường thẳng đi qua  $M$  lần lượt song song với  $a$  và  $b$ . Vì  $a$ ,  $b$  chéo nhau nên  $a'$ ,  $b'$  phân biệt, do đó có mp( $P$ ) đi qua  $a'$  và  $b'$ . Mặt phẳng ( $P$ ) hoặc song song với  $a$ , hoặc chứa  $a$ , mp( $P$ ) hoặc song song với  $b$  hoặc chứa  $b$ .

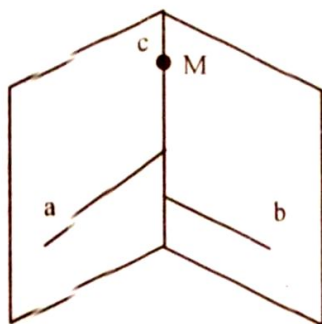
Nhưng mp( $P$ ) không thể đồng thời chứa  $a$  và  $b$  vì như vậy  $a$ ,  $b$  không chéo nhau. Vậy mp( $P$ ) song song với cả  $a$  và  $b$ , hoặc song song với một trong hai đường thẳng đó và chứa đường thẳng kia.

Vì  $a'$  và  $b'$  duy nhất nên mp( $P$ ) duy nhất qua  $M$  thỏa điều kiện.



**Ví dụ 12:** Cho hai đường thẳng chéo nhau  $a$ ,  $b$  và một điểm  $M$  không nằm trên  $a$  và  $b$ . Hãy xác định một đường thẳng  $c$  đi qua  $M$  cắt cả  $a$  và  $b$ . Trong trường hợp nào không có đường thẳng  $c$ ?

**Giải**



Vì mp( $a$ ;  $M$ ) và mp( $b$ ;  $M$ ) có điểm chung  $M$  nên cắt nhau theo một giao tuyến  $c$  đi qua  $M$ . Đường thẳng  $c$  nằm trong mp( $a$ ;  $M$ ) và mp( $b$ ;  $M$ ) nên  $c$  có thể cắt  $a$  và cắt  $b$ . Khi đó  $c$  là đường thẳng phải xác định.

Nếu  $c \parallel a$  hoặc  $c \parallel b$  thì đường thẳng  $c$  không thỏa mãn yêu cầu. Trường hợp này xảy ra khi mp( $b$ ;  $M$ )  $\parallel$  a hoặc mp( $a$ ;  $M$ )  $\parallel$  b.

**Ví dụ 13:** Cho tứ diện ABCD và ba điểm P, Q, R lần lượt nằm trên ba cạnh AB, CD, BC. Hãy xác định giao điểm S của mp(PQR) với cạnh AD nếu:

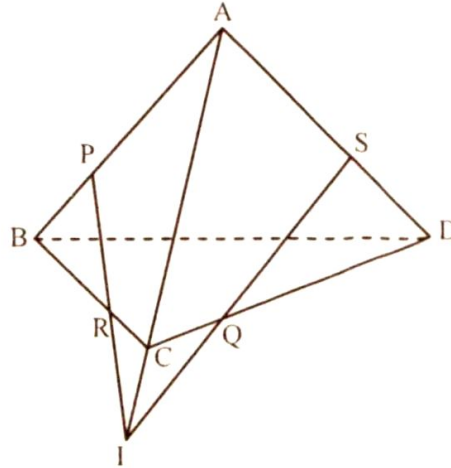
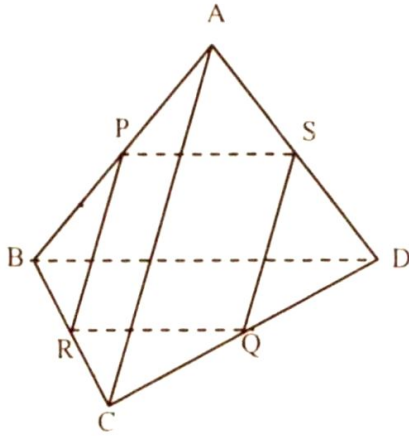
a)  $PR \parallel AC$ .

b)  $PR$  cắt  $AC$ .



### Giải

- a) Xét  $PR \parallel AC$ . Từ  $Q$  ta vẽ đường thẳng song song với  $AC$  cắt  $AD$  tại  $S$ . Ta có  $QS \parallel PR$  nên bốn điểm  $P, Q, R, S$  đồng phẳng.  
Vậy  $S = mp(PQR) \cap AD$ .



- b) Xét  $PR$  cắt  $AC$  tại  $I$ . Khi đó  $IQ = (PQR) \cap (ACD)$ . Đường thẳng  $IQ$  cắt  $AD$  tại  $S$ .  
Vậy  $S = (PQR) \cap AD$ .

**Ví dụ 14:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Bốn điểm  $P, Q, R, S$  lần lượt nằm trên bốn cạnh  $AB, BC, CD, DA$  và không trùng với các đỉnh của tứ diện. Chứng minh rằng: bốn điểm  $P, Q, R, S$  đồng phẳng khi và chỉ khi ba đường thẳng  $PQ, RS, AC$  hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

### Giải

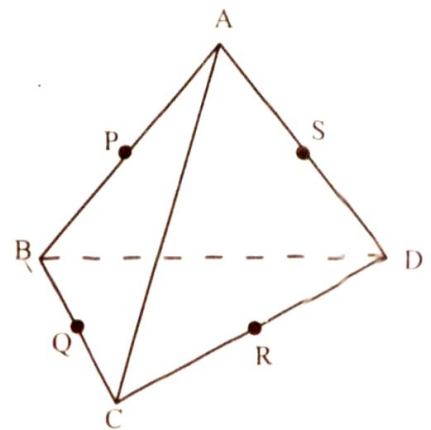
Nếu  $P, Q, R, S$  đồng phẳng thì chúng cùng thuộc một  $mp(\alpha)$  nào đó. Xét ba mặt phẳng:  $mp(\alpha), mp(ABC), mp(ACD)$ .

Ta có:  $PQ = (\alpha) \cap (ABC)$ ,

$RS = (\alpha) \cap (ACD)$ ,

$AC = (ABC) \cap (ACD)$ . Theo định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng, ta suy ra  $PQ, AC, RS$  hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

Ngược lại, nếu ba đường thẳng  $PQ, AC, RS$  hoặc đôi một song song hoặc đồng quy thì hai đường thẳng  $PQ$  và  $RS$  hoặc song song hoặc cắt nhau. Vậy hai đường thẳng  $PQ$  và  $RS$  cùng thuộc một mặt phẳng, từ đó bốn điểm  $P, Q, R, S$  đồng phẳng.

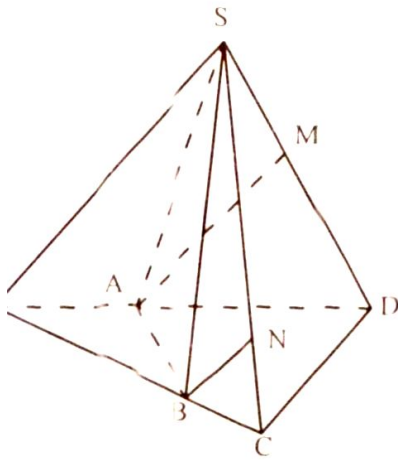


**Ví dụ 15:** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có  $AD$  cắt  $BC$ . Hãy tìm điểm  $M$  nằm trên cạnh  $SD$  và điểm  $N$  trên cạnh  $SC$  sao cho  $AM \parallel BN$ .

### Giải

Gọi  $I$  là giao điểm của  $BC$  và  $AD$ , khi đó  $(SAD) \cap (SBC) = SI$ .





Giả sử có  $M \in SD$ ,  $N \in SC$  sao cho  $AM \parallel BN$  thì khi đó hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) cắt nhau theo giao tuyến SI phải song song với AM và BN. Từ đó ta suy ra cách xác định điểm M và N như sau: Từ A trong mp(SAD) ta vẽ đường thẳng song song với SI, cắt SD tại M; từ B trong mp(SBC) ta vẽ đường thẳng song song với SI, cắt SC tại N. Vậy M và N là hai điểm cần tìm.

## DẠNG 2: CHỨNG MINH SONG SONG

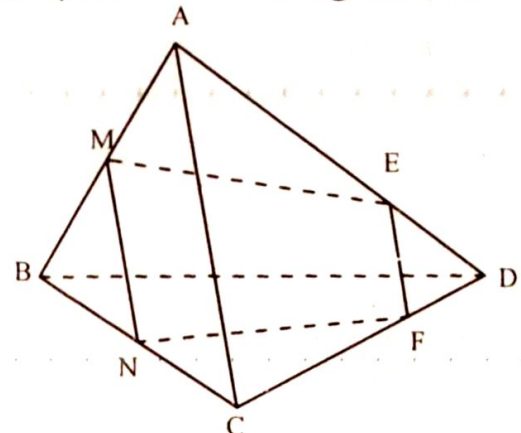
- Để chứng minh 2 đường thẳng song song, ta có thể chứng minh:
    - Hai đường thẳng đồng phẳng và không có điểm chung.
    - Nếu 2 đường thẳng đồng phẳng thì sử dụng định lý Talet, các hình thang, hình bình hành, đường trung bình của tam giác, quan hệ song song và vuông góc, ...
    - Hai đường phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
    - Một đường thẳng là giao tuyến của 2 mặt phẳng mà một mặt chứa đường thẳng còn lại và đường thẳng này song song với mặt phẳng thứ hai (giao tuyến song song).
    - Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.
  - Để chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng ta có thể chứng minh:
    - Đường thẳng và mặt phẳng không có điểm chung.
    - Đường thẳng nằm ngoài mặt phẳng và song song với một đường thẳng của mặt phẳng.
- Chú ý: Từ quan hệ song song ta có thể chứng minh các hệ thức, đánh giá tỉ số.

**Ví dụ 1:** Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC. Mặt phẳng (P) qua M, N cắt cạnh DA, DC tại E và F. Chứng minh EF song song với MN, AC.

**Giải**

Ba mặt phẳng (ABC), (ACD) và (P) lần lượt cắt nhau theo các giao tuyến AC, MN và EF phân biệt.

Vì  $MN \parallel AC$  (đường trung bình của tam giác ABC) nên theo định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng đôi một cắt nhau thì  $EF \parallel MN, AC$ .





**Ví dụ 2:** Cho tứ diện ABCD có I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD. Chứng minh:

a)  $IJ \parallel CD$ .

b)  $IJ \parallel mp(ACD), (BCD)$ .

**Giải**

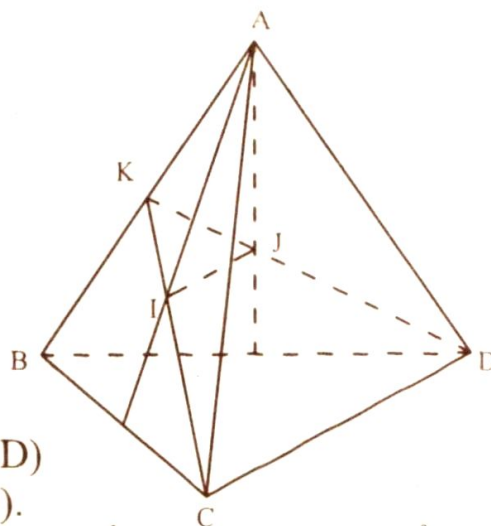
a) Gọi K trung điểm của AB.

Vì I là trọng tâm của tam giác ABC nên  $I \in KC$  và vì J là trọng tâm của tam giác ABD nên  $J \in KD$ .

Trong  $mp(KCD)$ :

$$\frac{KI}{KC} = \frac{KJ}{KD} = \frac{1}{3} \Rightarrow IJ \parallel CD.$$

b) Ta có IJ không thuộc mặt phẳng (ACD) và  $IJ \parallel CD$ ,  $CD \subset (ACD)$  nên  $IJ \parallel (ACD)$ . Tương tự  $IJ \parallel (BCD)$ .



**Ví dụ 3:** Cho hình tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC.

a) Xét vị trí tương đối của đường thẳng MN và  $mp(BCD)$ .

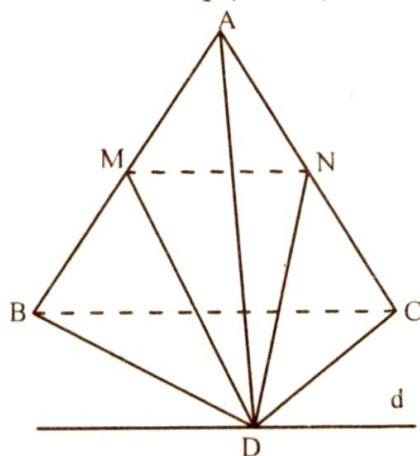
b) Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (DMN) và (DBC). Chứng minh  $d \parallel mp(ABC)$ .

**Giải**

a) MN là đường trung bình của tam giác ABC nên  $MN \parallel BC$ .

Ta có MN không thuộc  $mp(BCD)$  nên  $MN \parallel mp(BCD)$ .

b) Vì  $MN \parallel (BCD)$  nên  $mp(DMN)$  đi qua MN cắt  $mp(BCD)$  theo giao tuyến  $d \parallel MN$ . Vậy  $d \parallel mp(ABC)$ .



**Ví dụ 4:** Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho  $MB = 2MC$ . Chứng minh rằng MG song song với  $mp(ACD)$ .

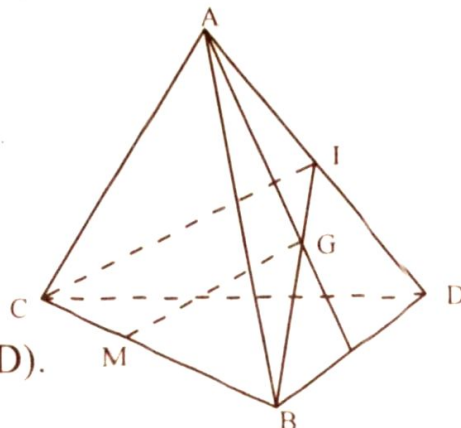
**Giải**

Gọi I là trung điểm AD.

Trong tam giác CBI ta có:

$$\frac{BM}{BC} = \frac{BG}{BI} = \frac{2}{3} \text{ nên } MG \parallel CI.$$

Vì CI nằm trong mặt phẳng (ACD) và MG không thuộc (ACD) nên  $MG \parallel (ACD)$ .



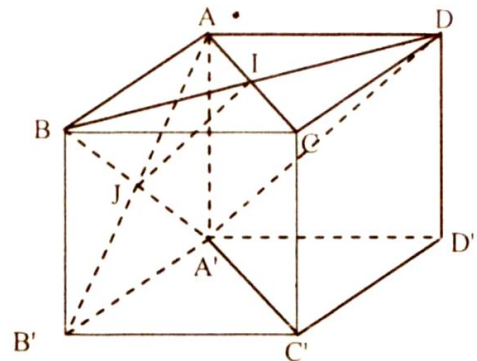


**Ví dụ 5:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$

- Chứng minh  $AC \parallel mp(A'B'C'D')$ .
- Gọi  $I$  và  $J$  là 2 tâm của 2 hình vuông  $ABCD$  và  $ABB'A'$ . Chứng minh  $IJ \parallel mp(A'B'CD)$ .

**Giải**

- $AC \parallel A'C'$  mà đường thẳng  $A'C'$  thuộc  $mp(A'B'C'D')$  nên  $AC \parallel mp(A'B'C'D')$ .
- Tam giác  $BDA'$  có đường trung bình  $IJ \parallel DA'$  mà đường thẳng  $IJ$  không thuộc  $mp(A'B'CD)$  nên  $IJ \parallel mp(A'B'CD)$ .

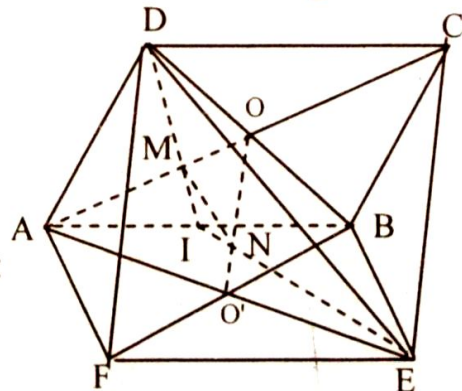


**Ví dụ 6:** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  không cùng nằm trong một mặt phẳng.

- Gọi  $O$  và  $O'$  lần lượt là tâm của  $ABCD$  và  $ABEF$ . Chứng minh  $OO'$  song song với các mặt phẳng  $(ADF)$  và  $(BCE)$ .
- Gọi  $M$  và  $N$  là trọng tâm các tam giác  $ABD$  và  $ABE$ . Chứng minh  $MN$  song song với mặt phẳng  $(CDEF)$ .

**Giải**

- Ta có:  $OO' \parallel DF$ , nên:  $OO' \parallel (ADF)$ .  
Tương tự:  $OO' \parallel CE$  nên  $OO' \parallel (BCE)$
- Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ .  
Trong  $mp(IDE)$ , vì  $M, N$ , là trọng tâm nên:  
$$\frac{IM}{ID} = \frac{IN}{IE} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN \parallel DE.$$



Vì  $MN$  không nằm trong  $(CDEF)$  nên  $MN \parallel (CDEF)$ .

**Ví dụ 7:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Các điểm  $P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ ; điểm  $R$  nằm trên cạnh  $BC$  sao cho  $BR = 2RC$ . Gọi  $S$  là giao điểm của  $mp(PQR)$  và cạnh  $AD$ . Chứng minh rằng  $AS = 2SD$ .

**Giải**

Gọi  $I$  là giao điểm của  $RQ$  và  $BD$ ;  $E$  là trung điểm của  $BR$ .

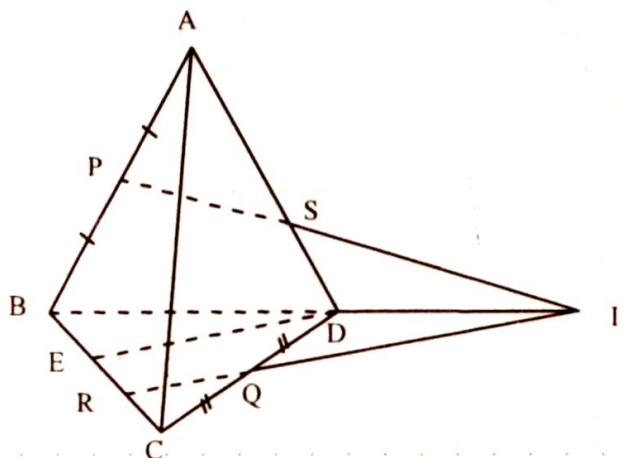
Khi đó  $EB = ER = RC$  và  $RQ \parallel ED$ .

Tam giác  $BRI$  có:

$ED \parallel RQ$ ,

suy ra: 
$$\frac{BD}{DI} = \frac{BE}{ER} = 1$$

Do đó  $DB = DI$  nên  $AD$  và  $IP$  là hai đường trung tuyến của tam giác  $ABI$  nên giao điểm  $S$  của  $AD$  và  $IP$  là trọng tâm của tam giác  $ABI$  và ta có  $AS = 2SD$ .



**ABC**



**Ví dụ 8:** Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD.

a) Chứng minh rằng đường thẳng đi qua G và một đỉnh của tứ diện sẽ đi qua trọng tâm của mặt đối diện với đỉnh ấy.

b) Gọi A' là trọng tâm của mặt BCD.

Chứng minh rằng  $GA = 3GA'$ .

**Giải**

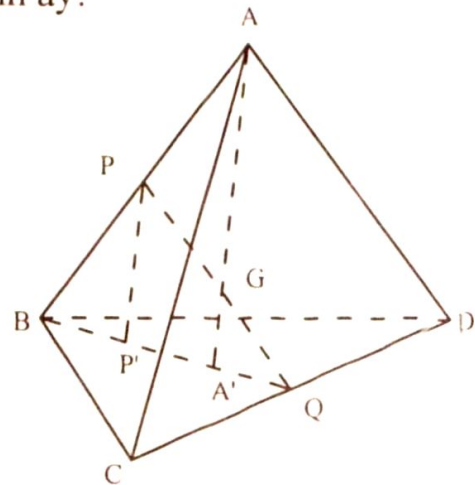
a) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD thì trọng tâm G của tứ diện ABCD là trung điểm của PQ.

Giả sử đường thẳng AG cắt mp(BCD) tại A'. Ta chứng minh A' là trọng tâm tam giác BCD. Ta có A' thuộc đường trung tuyến BQ của tam giác BCD.

Từ P ta vẽ  $PP' \parallel AA'$  ( $P' \in BQ$ ) thì  $PP'$  là đường trung bình của tam giác  $ABA'$ , còn  $GA'$  là đường trung bình của tam giác  $QPP'$ , do đó  $AA' = 2PP'$ ,  $PP' = 2GA'$  và  $BP' = P'A' = A'Q$ .

Vậy A' là trọng tâm tam giác BCD.

b) Ta có  $AA' = 4GA'$  nên  $GA = 3GA'$ .



**Ví dụ 9:** Cho hình chóp S.ABC và một điểm M nằm trong tam giác ABC.

Các đường thẳng qua M lần lượt song song với các đường thẳng SA, SB, SC cắt các mặt phẳng (SBC), (SCA), (SAB) tại A', B', C'.

Chứng minh rằng  $\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} = 1$ .

**Giải**

Kéo dài AM cắt BC tại N. Trong mp(SAN) kẻ  $MA'$  song song với SA cắt SN tại A'. Điểm A' là điểm cần tìm.

Tương tự xác định được các điểm B', C'.

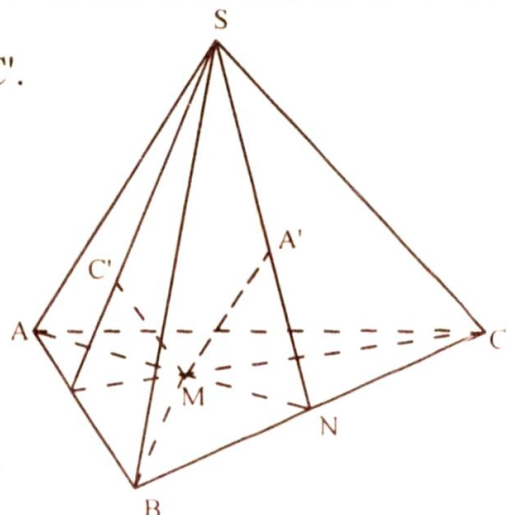
Ta có:  $\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \frac{MN}{AN}$

mà  $\frac{MN}{AN} = \frac{MA'}{SA}$

Do đó  $\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \frac{MA'}{SA}$

Tương tự:  $\frac{S_{MCA}}{S_{ABC}} = \frac{MB'}{SB}$ ,  $\frac{S_{MAB}}{S_{ABC}} = \frac{MC'}{SC}$

Vậy:  $\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} = \frac{S_{MBC} + S_{MCA} + S_{MAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$ .



**Ví dụ 10:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) lần lượt cắt các cạnh SA, SB, SC tại A', B', C'. Gọi O là giao điểm của AC và BD; I là giao điểm của A'C' và SO.



a) Tìm giao điểm  $D'$  của  $mp(P)$  với cạnh  $SD$ .

b) Chứng minh rằng  $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$ .

### Giải

a) Trong  $mp(SAC)$ ,  $A'C'$  cắt  $SO$  tại  $I$ . Trong  $mp(SBD)$ ,  $B'I$  cắt  $SD$  tại  $D'$ . Khi đó  $D'$  chính là giao điểm của  $mp(P)$  với  $SD$ .

b) Trong  $mp(SAC)$ , vẽ  $AE \parallel A'C'$  cắt  $SO$  tại  $E$ ;  
vẽ  $CF \parallel A'C'$  cắt  $SO$  tại  $F$ .

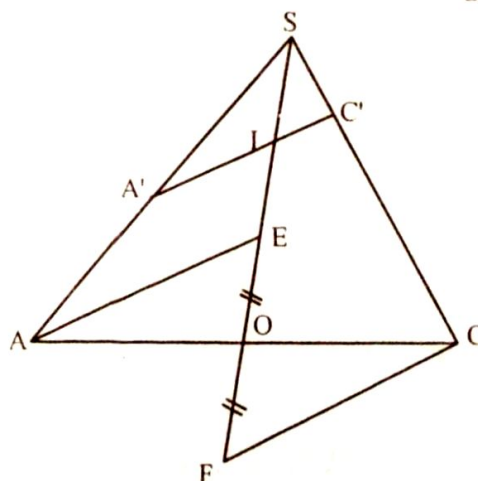
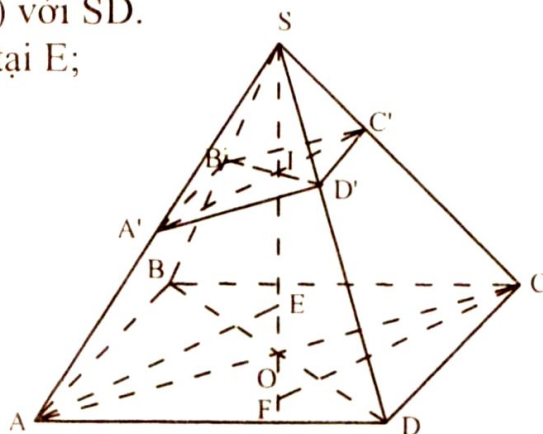
$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{SA}{SA'} &= \frac{SE}{SI} = \frac{SO - OE}{SI} \\ \frac{SC}{SC'} &= \frac{SF}{SI} = \frac{SO + OF}{SI} \end{aligned}$$

Vì  $O$  là trung điểm của  $AC$   
và  $AE \parallel CF$ , nên  $OE = OF$ .

$$\text{Suy ra: } \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{2SO}{SI}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{2SO}{SI}$$

$$\text{Vậy: } \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$$



### DẠNG 3: GIAO TUYẾN VÀ THIẾT DIỆN SONG SONG

#### • Giao tuyến song song:

- Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

- Cho đường thẳng song song với mặt phẳng. Nếu có mặt phẳng chứa đường thẳng này và cắt mặt phẳng thì giao tuyến song song với đường thẳng đã cho.

- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với ít nhất một trong hai đường thẳng đó.

- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng song song với đường thẳng đó.

#### • Thiết diện song song:

Sử dụng các tính chất và kết quả về giao tuyến song song ở trên để tìm các đỉnh và các cạnh của thiết diện.

Chú ý: Sử dụng mặt phẳng phụ và các kỹ thuật đã nêu: cắt nhau hoặc kéo dài cắt nhau, đường giống, giao tuyến gốc và quan hệ đề bài cho.



**Ví dụ 1:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành  $ABCD$ . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

a)  $(SAB)$  và  $(SCD)$

b)  $(SAD)$  và  $(SBC)$ .

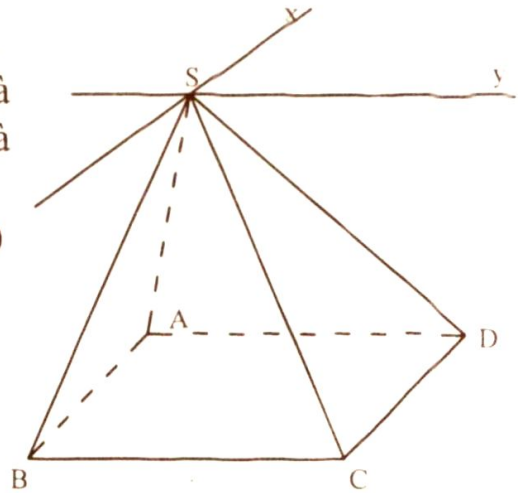
**Giải**

a)  $S$  là điểm chung của 2 mp  $(SAB)$  và  $(SCD)$ . Gọi giao tuyến của  $(SAB)$  và  $(SCD)$  là  $Sx$ .

Vì  $AB \parallel CD$ ,  $AB \subset (SAB)$ ,  $CD \subset (SCD)$  nên mặt phẳng  $(SAB)$  cắt mp  $(SCD)$  theo giao tuyến  $Sx \parallel AB, CD$ .

b) Vẽ  $Sy \parallel AD$  thì  $Sy \subset mp(SAD)$   
Vì  $BC \parallel AD$  nên  $Sy \parallel BC$ , do đó  
 $Sy \subset mp(SBC)$ .

Vậy  $(SAD) \cap (SBC) = Sy$ .



**Ví dụ 2:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang,  $AB \parallel CD$ . Xác định giao tuyến của 2 mặt phẳng:

a)  $(SAC)$  và  $(SBD)$

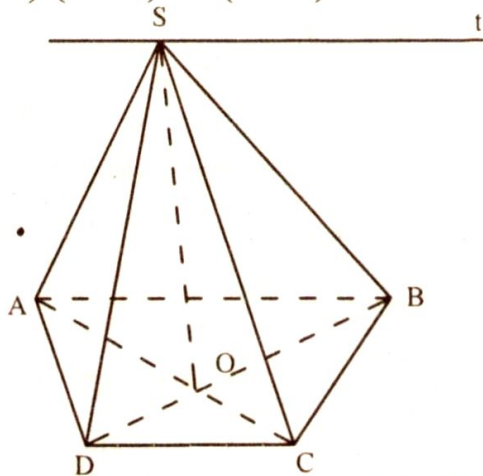
b)  $(SAB)$  và  $(SCD)$ .

**Giải**

a) Trong mp  $(ABCD)$ ,  $AC \cap BD = O$  thì  $S$  và  $O$  là 2 điểm chung của 2 mp  $(SAC)$ ,  $(SBO)$  nên giao tuyến của chúng là  $SO$ .

b) Ba mặt phẳng  $(SAB)$ ,  $(SCD)$ ,  $(ABCD)$  cắt nhau theo 3 giao tuyến phân biệt  $AB, DC, St$ .

Vì  $AB \parallel DC$  nên  $St \parallel AB, DC$ .



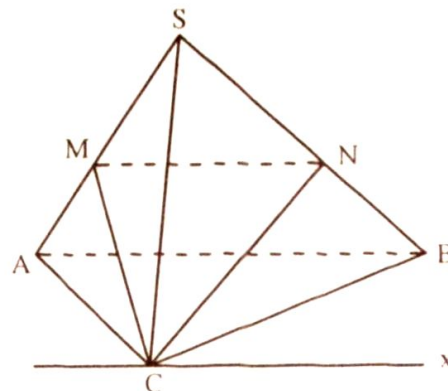
**Ví dụ 3:** Cho tứ diện  $SABC$ . Trên 2 cạnh  $SA, SB$  lần lượt lấy  $M, N$  sao cho  $MS = 2MA$ ,  $NS = 2NB$ . Xác định giao tuyến của 2 mp  $(ABC)$  và mp  $(CMN)$ .

**Giải**

Trong mp  $(SAB)$ :  $\frac{MS}{MA} = 2 = \frac{NS}{NB}$

nên  $MN \parallel AB$ .

Do đó mp  $(CMN)$  chứa  $MN$  cắt mặt phẳng  $(ABC)$  theo giao tuyến  $Cx \parallel AB$ .

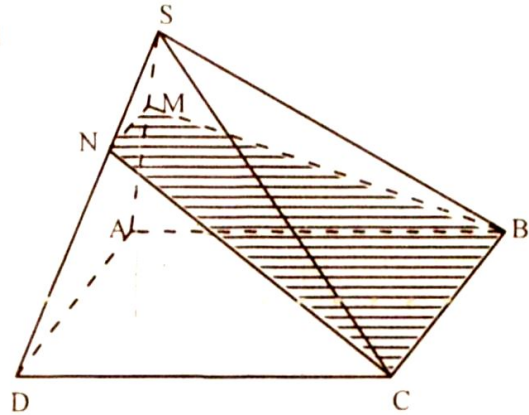




**Ví dụ 4:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành. Điểm  $M$  thuộc cạnh  $SA$ . Xác định thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  khi cắt bởi mặt phẳng  $(MBC)$ .

**Giải**

Ta có  $mp(MBC)$  và  $mp(SAD)$ , lần lượt đi qua hai đường thẳng song song  $BC$  và  $AD$  và có điểm chung  $M$  nên giao tuyến là đường thẳng  $MN$  song song với  $AD$  ( $N \in SD$ ).  
 Vậy thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  khi cắt bởi  $mp(MBC)$  là hình thang  $MNCB$ .



**Ví dụ 5:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M$  là một điểm nằm trên cạnh  $AB$  khác  $A$  và  $B$ . Cắt tứ diện bởi mặt phẳng  $(P)$  qua  $M$  song song với các đường thẳng  $AC$  và  $BD$ . Chứng minh thiết diện là hình bình hành.

**Giải**

Từ  $M$  vẽ đường thẳng song song với  $AC$  cắt  $BC$  tại  $N$  và vẽ đường thẳng song song với  $BD$  cắt  $AD$  tại  $F$ . Do đó  $(P)$  chính là  $mp(MNF)$ .

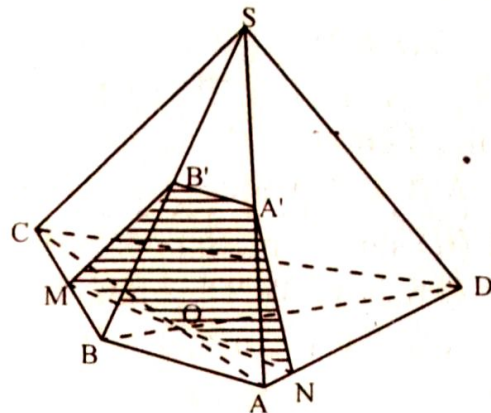
Gọi  $E$  là giao điểm của  $(P)$  với  $CD$  thì thiết diện là tứ giác  $MNEF$ . Vì đường thẳng  $MN$  song song với  $mp(ACD)$  nên  $mp(P)$  qua  $MN$  cắt  $mp(ACD)$

theo giao tuyến  $EF$  song song với  $MN$ . Tương tự, giao tuyến  $NE$  song song với  $MF$ . Vậy thiết diện là hình bình hành  $MNEF$ .

**Ví dụ 6:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là tứ giác lồi,  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua  $O$ , song song với  $AB$  và  $SC$ . Thiết diện đó là hình gì?

**Giải**

Qua  $O$  vẽ đường thẳng song song với  $AB$ , cắt  $BC$  và  $AD$  tại  $M$  và  $N$ . Từ  $M$  vẽ đường thẳng song song với  $SC$ , cắt  $SB$  tại  $B'$ . Từ  $B'$  vẽ đường thẳng song song với  $BA$  cắt  $SA$  tại  $A'$ .  
 Ta có  $MN \parallel B'A'$  nên thiết diện là hình thang  $A'B'MN$ .





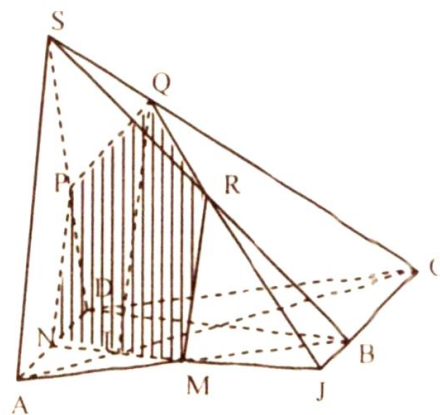
**Ví dụ 7:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trung điểm  $M$  của cạnh  $AB$ , song song với  $BD$  và  $SA$ .

**Giải**

Qua  $M$  vẽ đường thẳng song song với  $BD$  cắt  $AD$  tại  $N$  và cắt  $AC$  tại  $I$ . Qua  $M, I, N$  vẽ các đường thẳng song song với  $SA$  lần lượt cắt  $SB, SC, SD$  tại  $R, Q, P$ .

Thiết diện là ngũ giác  $MNPQR$ .

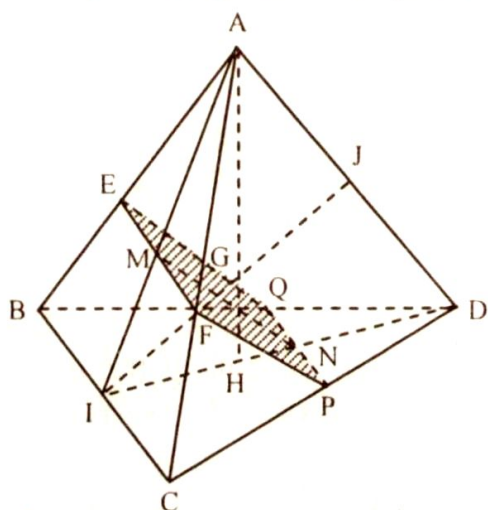
Cách khác: Tìm giao điểm  $Q$  của mặt phẳng cắt với cạnh  $SC$  bằng cách nối giao điểm  $J$  của  $MN$  và  $BC$  với  $R$  và kéo dài cắt  $SC$  tại  $Q$ .



**Ví dụ 8:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Vẽ thiết diện của tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trọng tâm của tứ diện và song song với  $BC, AD$ .

**Giải**

Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AD$  thì trung điểm  $G$  của  $IJ$  là trọng tâm của tứ diện  $ABCD$ . Theo tính chất giao tuyến song song, qua  $G$  vẽ đường thẳng  $MN \parallel AD$  ( $M \in AI, N \in DI$ ). Qua  $M$  vẽ đường thẳng  $EF \parallel BC$  ( $E \in AB, F \in AC$ ) và qua  $N$  vẽ đường thẳng  $PQ \parallel BC$  ( $P \in CD, Q \in BD$ ). Hình bình hành  $EFPQ$  là thiết diện cần dựng.



**Ví dụ 9:** Cho hình chóp  $S.ABCD$ , tứ giác đáy có các cạnh đối  $AB$  và  $CD$  kéo dài cắt nhau tại  $E$ ,  $AD$  và  $BC$  cắt nhau tại  $F$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng cắt  $SA, SB, SC, SD$  lần lượt tại  $A', B', C', D'$ .

Tìm điều kiện của  $mp(\alpha)$  để thiết diện  $A'B'C'D'$  là:

a) Hình thang?

b) Hình bình hành?

**Giải**

Ta có  $(SAB) \cap (SCD) = SE$ ,

$(SAD) \cap (SBC) = SF$

a) Thiết diện  $A'B'C'D'$  là hình thang

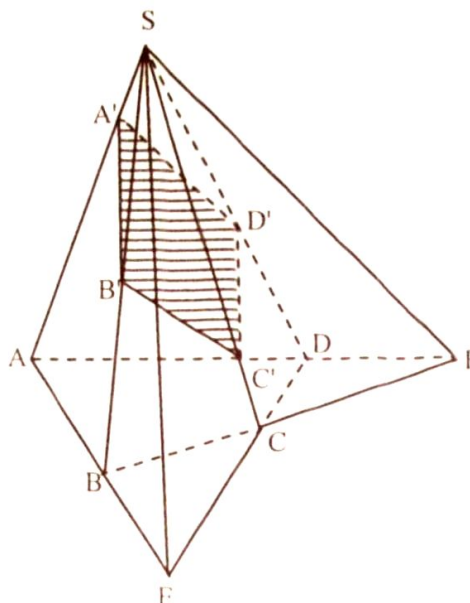
$\Leftrightarrow A'B' \parallel C'D'$  hoặc  $A'D' \parallel B'C'$ .

$\Leftrightarrow (\alpha)$  song song  $SD$  hoặc  $SF$ .

b) Thiết diện  $A'B'C'D'$  là hình bình hành

$\Leftrightarrow A'B' \parallel C'D'$  và  $A'B' \parallel B'C'$

$\Leftrightarrow (\alpha)$  song song với  $SE$  và  $SF$ .

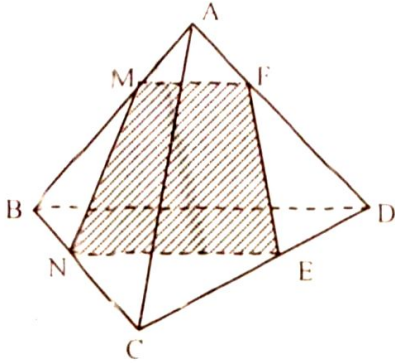




**Ví dụ 10:** Nêu cách cắt tứ diện ABCD bằng một mặt phẳng để thiết diện là:

- a) Hình thang      b) Hình bình hành      c) Hình thoi.

**Giải**



- a) Chọn mặt phẳng đi qua M, N là hai điểm lần lượt nằm trên hai cạnh AB, BC và song song với BD thì thiết diện là hình thang MNEF.  
 b) Chọn mặt phẳng qua điểm M nằm trên cạnh AB và song song với hai đường thẳng BD và AC thì thiết diện là hình bình hành MNEF.  
 c) Ta tìm điều kiện để thiết diện hình bình hành MNEF trong câu b) là hình thoi.

$$\text{Ta có: } \frac{MF}{BD} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow MF = \frac{BD \cdot AM}{AB}$$

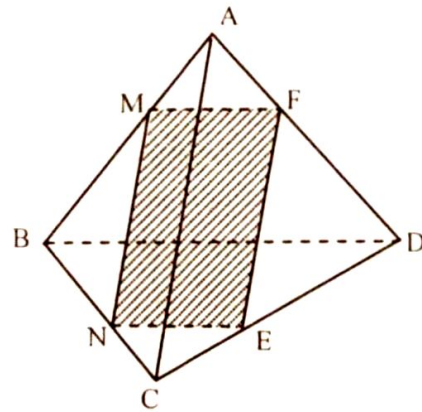
$$\frac{MN}{AC} = \frac{MB}{AB} \Rightarrow MN = \frac{AC \cdot MB}{AB}$$

Tứ giác MNEF là hình thoi

$$\Leftrightarrow MF = MN \Leftrightarrow BD \cdot AM = AC \cdot MB$$

$$\Leftrightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$$

Vậy, nếu ta cắt tứ diện ABCD bằng một mặt phẳng (P) qua M thuộc cạnh AB sao cho  $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$  và song song với BD, AC thì được thiết diện của tứ diện là hình thoi.



**Ví dụ 11:** Trên các cạnh  $AA_1$  và  $CC_1$  của hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  lần lượt lấy các điểm M và N sao cho  $MA_1 = 2MA$ ,  $NC = 2NC_1$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua MN và song song với  $B_1D_1$ .

a) Xác định giao tuyến của  $(\alpha)$  và  $mp(A_1B_1C_1D_1)$ .

b) Dựng thiết diện khi cắt bởi  $mp(\alpha)$ .

**Giải**

a) Trong  $mp(AA_1; CC_1)$ , kéo dài MN cắt  $A_1C_1$  tại I.

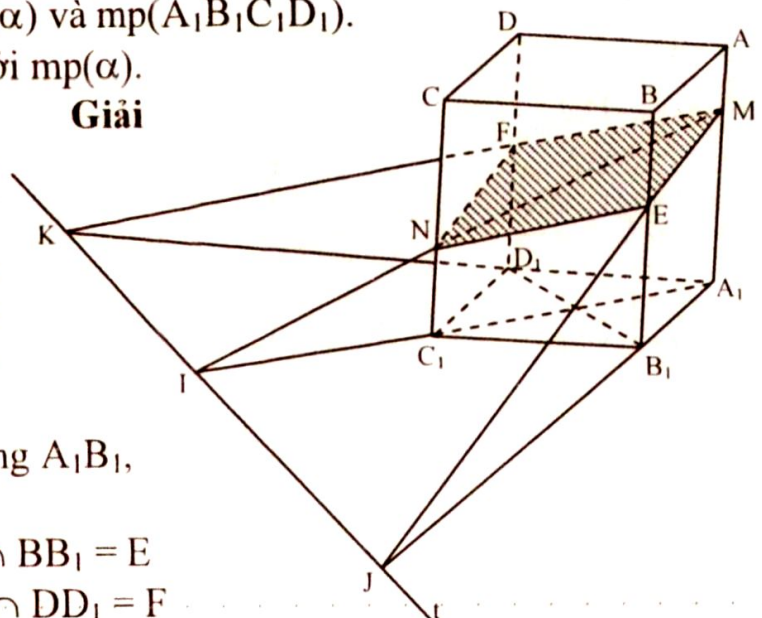
Vì  $(\alpha)$  qua M, N và song song với  $BD$ , nên  $(\alpha)$  cắt mặt đáy  $(A_1B_1C_1D_1)$  theo giao tuyến  $It \parallel B_1D_1$ .

b) Giao tuyến  $It$  cắt đường thẳng  $A_1B_1$ ,  $A_1D_1$  tại J, K.

Trong  $mp(AA_1, BB_1)$ ,  $JM \cap BB_1 = E$

Trong  $mp(CC_1, DD_1)$ ,  $KM \cap DD_1 = F$

Vậy thiết diện là tứ giác MENF có đường chéo  $EF \parallel B_1D_1$ .



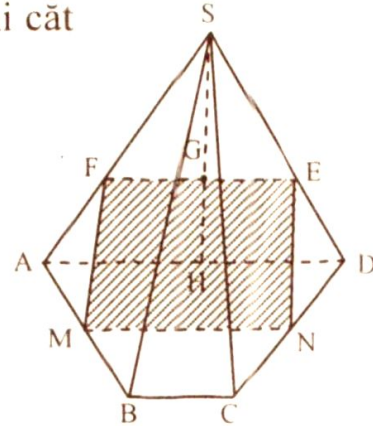


**Ví dụ 12:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD ( $AD \parallel BC$ ). Gọi M, N và G lần lượt là trung điểm của AB, CD và trọng tâm tam giác SAD.

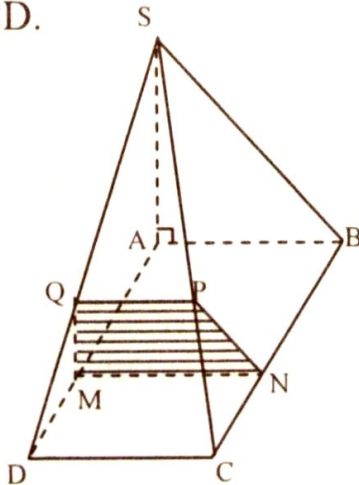
- Xác định giao tuyến của mp(SAB) và mp(SCD).
- Dựng thiết diện của hình chóp S.ABCD khi cắt bởi mp(MNG).

**Giải**

- Gọi O là giao điểm của AB và CD.  
Đường thẳng SO là giao tuyến của các mặt phẳng (SAB) và (SCD).
- Ta có đường trung bình  $MN \parallel AD, BC$ , vẽ đường thẳng d qua G và song song với AD cắt SD, SA theo thứ tự tại E, F.  
Hình thang MNEF là thiết diện cần dựng.



**Ví dụ 13:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành với  $AB = a, AD = 2a$ . Mặt bên SAB là một tam giác vuông cân tại đỉnh A. Trên cạnh AD lấy một điểm M và đặt  $AM = x$  ( $0 < x < 2a$ ). Xác định và tính diện tích thiết diện cắt bởi mp( $\alpha$ ) đi qua M, song song với SA và CD.



**Giải**

Ta có mp( $\alpha$ ) song song với giao tuyến DC của hai mặt phẳng (SDC) và (ABCD) nên cắt hai mặt phẳng này theo hai giao tuyến song song:

$$MN \parallel PQ.$$

Do đó tứ giác MNPQ là hình thang, hơn nữa là hình thang vuông vì:

$$\widehat{QMN} = \widehat{SAB} = 90^\circ.$$

Áp dụng định lý Talet, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{PQ}{MN} &= 1 - \frac{QM}{SA} = 1 - \frac{DM}{DA} = 1 - \frac{2a - x}{2a} = \frac{x}{2a} \\ \Rightarrow PQ &= \frac{x}{2} \text{ và } \frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA} = \frac{2a - x}{2a} \Rightarrow MQ = \frac{2a - x}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } S_{MNPQ} &= \frac{1}{2} (MN + PQ) \cdot MQ \\ &= \frac{1}{2} \left( a + \frac{x}{2} \right) \frac{2a - x}{2} = \frac{4a^2 - x^2}{8}. \end{aligned}$$



## DẠNG 4: TOÁN TỔNG HỢP

- Tập hợp điểm là mặt phẳng: Trước hết xác định mặt phẳng ( $\alpha$ ) sẽ chứa các điểm M cần tìm quỹ tích, sau đó chứng minh  $M \in (\alpha)$ . Xem xét giới hạn theo yêu cầu của bài toán và làm phần đảo.

- Yếu tố cố định: Sử dụng cách xác định điểm, đường thẳng, mặt phẳng cũng như tương giao của đường thẳng, mặt phẳng cố định.

- Sử dụng các kết quả về giao tuyến song song, giao tuyến qua 2 điểm phân biệt, giao điểm của hai đường thẳng, đường thẳng và mặt phẳng để xác định thiết diện.

**Ví dụ 1:** Cho hai nửa đường thẳng Ax và By chéo nhau. Hai điểm M và N lần lượt di động trên Ax và By sao cho  $AM = BN$ .

a) Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Chứng minh trung điểm I của MN thuộc một mặt phẳng cố định.

**Giải**

a) Dựng  $Bx' \parallel Ax$ . Trong mặt phẳng  $(Ax, Bx')$ , đường thẳng qua M song song với AB cắt  $Bx'$  tại  $M'$ .

Ta có:  $BM' = BN = AM$ .

Vậy  $BNM'$  là tam giác cân tại B nên  $M'N$  song song với phân giác ngoài Bt của góc  $x'By$ .

Ta có: 
$$\begin{cases} MM' \parallel AB \\ M'N \parallel Bt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MM' \parallel (AB, Bt) \\ M'N \parallel (AB, Bt) \end{cases}$$

Nên hai mặt phẳng  $(MM'N)$  và  $(AB, Bt)$  song song với nhau.

Từ đó suy ra MN luôn luôn song song với mặt phẳng  $(AB, Bt)$  cố định.

b) Gọi  $I'$  trung điểm  $NM'$  thì  $BI'$  vuông góc  $NM'$  mà tam giác  $BNM'$  cân tại B nên  $I'$  thuộc phân giác trong  $Bu$  cố định.

Vì  $II' \parallel MM'$  nên  $II' \parallel AB$  do đó I thuộc mp(A, Bu) cố định.

**Ví dụ 2:** Cho tứ diện ABCD. Một mặt phẳng (P) di động luôn song song với 2 đường thẳng CD, AB lần lượt cắt các cạnh AC, AD, BD, BC tại M, N, E, F.

a) Chứng minh rằng tứ giác MNEF là một hình bình hành.

b) Tìm tập hợp tâm I của hình bình hành MNEF.

**Giải**

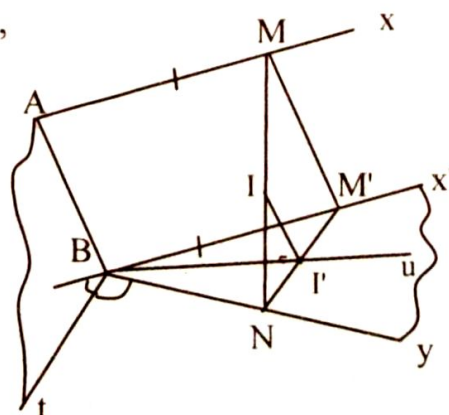
a) Ta có  $AB \parallel (P)$ ,  $AB \subset (ABC) \Rightarrow (ABC) \cap (P) = MF \parallel AB$

và  $AB \parallel (P)$ ,  $AB \subset (ABD) \Rightarrow (ABD) \cap (P) = NE \parallel AB$ .

Do đó  $MF \parallel NE \parallel AB$ . Chứng minh tương tự:

$MN \parallel EF \parallel CD$ .

Vậy tứ giác MNEF là hình bình hành.





b) Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và CD.

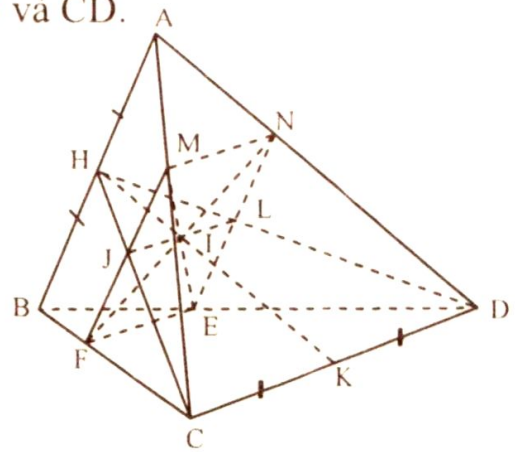
Gọi J và L lần lượt là các giao điểm của các cặp đường thẳng CH và MF, DH và NE thì ba điểm J, I, L thẳng hàng trên giao tuyến của 2 mp(P) và (HCD).

Ta có H, I, K thẳng hàng.

Vậy khi (P) di động thì tâm I của hình bình hành MNEF chạy trên đoạn thẳng HK.

Ngược lại, lấy một điểm I bất kì trên đoạn thẳng HK. Qua I kẻ đường thẳng song song với CD lần lượt cắt CH và DH tại J và L. Qua J và L lần lượt vẽ hai đường thẳng MF ( $M \in AC, F \in BC$ ), NE ( $N \in AD, E \in BD$ ) cùng song song với AB thì tứ giác MNEF là hình bình hành và có tâm là I.

Vậy tập hợp tâm I của hình bình hành MNEF là đoạn thẳng HK.



**Ví dụ 3:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M là một điểm chuyển động trên cạnh SC và  $\alpha$  là mặt phẳng chứa đường thẳng AM và song song với BD.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng  $\alpha$  luôn luôn đi qua một đường thẳng cố định khi M chuyển động trên cạnh SC.

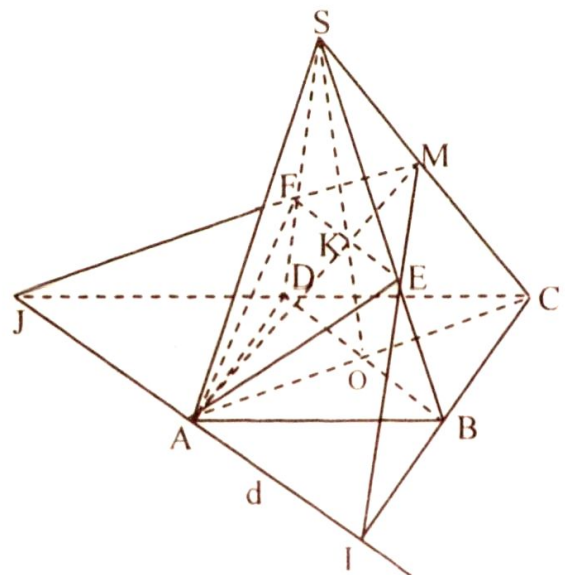
b) Mặt phẳng  $\alpha$  cắt SB và SD lần lượt tại E và F. Gọi I là giao điểm của ME và CB, J là giao điểm của MF và CD. Chứng minh ba điểm I, J, A thẳng hàng.

**Giải**

a)  $\alpha$  đi qua A và song song với BD nên cắt mp(ABCD) theo giao tuyến d đi qua A, song song với BD cố định.

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD, K là giao điểm của AM và SO, thế thì K là một điểm chung của  $\alpha$  và (SBD). Vì  $\alpha \parallel BD$  nên  $\alpha$  cắt (SBD) theo giao tuyến qua K là EF song song với BD.

Ba điểm I, J và A đều thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng  $\alpha$  và (ABCD) nên I, J, A thẳng hàng.

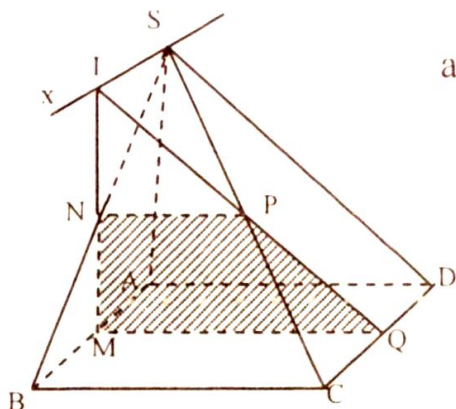


**Ví dụ 4:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. M là một điểm di động trên đoạn AB. Một mặt phẳng ( $\alpha$ ) đi qua M và song song với SA và BC; ( $\alpha$ ) cắt SB, SC và CD lần lượt tại N, P và Q.

a) Thiết diện MNPQ là hình gì?



- b) Gọi I là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh rằng I nằm trên một đường thẳng cố định.



### Giải

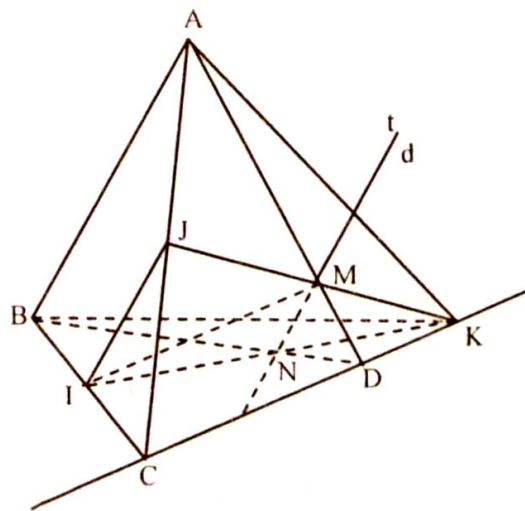
- a) Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua M, song song với SA, BC nên cắt mp(ABCD) theo giao tuyến  $MQ \parallel BC$ ,  $Q \in DC$ , cắt mp(SAB) theo giao tuyến  $MN \parallel SA$ ,  $N \in SB$  và cắt mp(SBC) theo giao tuyến  $NP \parallel BC$ ,  $P \in SC$ .  
Ta có  $NP \parallel MQ$  nên thiết diện là hình thang MNPQ.
- b) Ta có  $MN \subset mp(SAB)$  cố định và  $QP \subset mp(SCD)$  cố định nên giao điểm I của MN và PQ thuộc giao tuyến của (SAB) và (SCD) cố định.  
Vì  $AB \parallel CD$  nên giao tuyến  $Sx \parallel AB, CD$ .  
Vậy giao điểm I nằm trên  $Sx$  cố định.

**Ví dụ 5:** Cho tứ diện ABCD. Cho I và J tương ứng là trung điểm của BC và AC, M là một điểm tùy ý trên cạnh AD.

- a) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (MIJ) và (ABD).  
b) Gọi N là giao điểm của BD với giao tuyến d, K là giao điểm của IN và JM. Chứng minh khi M thay đổi thì K thuộc một đường thẳng cố định.

### Giải

- a) Ta có M là điểm chung của 2 mp(MIJ) và (ABD).  
Vì  $IJ \parallel AB$  nên (MIJ) cắt (ABD) theo giao tuyến d là  $Mt \parallel AB \parallel IJ$ .
- b) Ta có  $IN$  thuộc mp(BCD) cố định.  
và  $JM$  thuộc mp(ACD) cố định  
và  $(BCD) \cap (ACD) = CD$   
do đó giao điểm của IN và JM là  $K \in CD$  cố định.



**Ví dụ 6:** Trong mặt phẳng  $(\alpha)$  cho tam giác ABC. Từ ba đỉnh của tam giác này, vẽ các tia song song cùng chiều Ax, By, Cz không nằm trong  $(\alpha)$ . Trên Ax lấy đoạn AA', trên By lấy đoạn BB' trên Cz lấy đoạn CC'.

- a) Gọi I, J và K lần lượt là các giao điểm B'C', C'A' và A'B' với  $(\alpha)$ .

Chứng minh I, J, K thẳng hàng và  $\frac{IB}{IC} \cdot \frac{JC}{JA} \cdot \frac{KA}{KB} = 1$ .

- b) Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và A'B'C'.  
Chứng minh  $GG' \parallel AA'$ .



### Giải

- a) Ta có I, J, K thẳng hàng trên giao tuyến của 2 mp(ABC) và (A'B'C')  
Vì  $CC' \parallel BB'$

$$\Rightarrow \frac{IB}{IC} = \frac{BB'}{CC'}$$

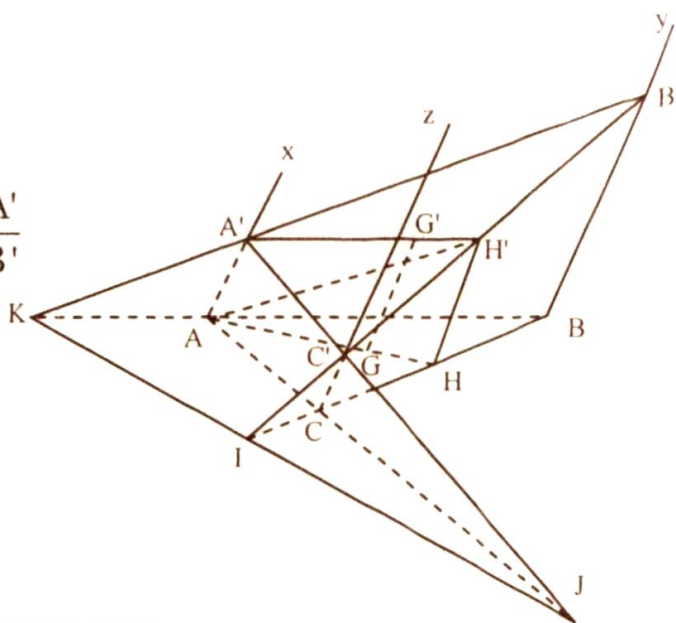
Tương tự có :

$$\frac{JC}{JA} = \frac{CC'}{AA'} \quad \text{và} \quad \frac{KA}{KB} = \frac{AA'}{BB'}$$

$$\text{Do đó: } \frac{IB}{IC} \cdot \frac{JC}{JA} \cdot \frac{KA}{KB} = 1$$

- b) Gọi H và H' lần lượt là trung điểm các cạnh BC và B'C' thì  $HH' \parallel BB'$ , do đó:  
 $HH' \parallel AA'$

$$\text{Ta có: } \frac{AG}{AH} = \frac{2}{3} = \frac{A'G'}{A'H'} \Rightarrow GG' \parallel AA'$$



**Ví dụ 7:** Chóp hình chóp tam giác S.ABC. Gọi K, N theo thứ tự là trung điểm của SA, BC. Điểm M chia đoạn SC theo tỉ số  $\frac{2}{3}$ .

- a) Tìm tỉ số diện tích tam giác ASC và AKM.  
b) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  qua M, N,  $\zeta$ .  
c) Giả sử mp( $\alpha$ ) cắt AB tại L, tính tỉ số  $\frac{LA}{LB}$ .

### Giải

- a) Vì K trung điểm SA và  $SC = \frac{5}{2}SM$  nên:

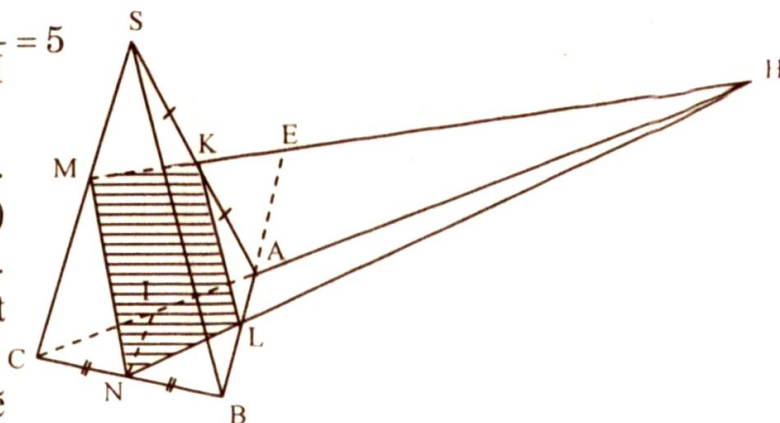
$$\frac{S_{ASC}}{S_{AKM}} = \frac{S_{ASC}}{\frac{1}{2}S_{SMA}} = 2 \cdot \frac{SC}{SM} = 5$$

- b) Kéo dài MK cắt CA tại H. Trong mặt phẳng (ABC) nối N với H cắt AB tại L. Tứ giác MKLN là thiết diện cần dựng.

- c) Trong mp(SAC) từ A vẽ  $AE \parallel SC$  ( $E \in MH$ ) thì:

$$AE = SM = \frac{2}{3}MC \Rightarrow \frac{HA}{HC} = \frac{AE}{MC} = \frac{2}{3} \Rightarrow HA = 2AC.$$

Gọi I là trung điểm của AC thì:





$$AL // NI \Rightarrow \frac{AL}{NI} = \frac{HA}{HI} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{AL}{AB} = \frac{AL}{2NI} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{Vậy } \frac{LA}{LB} = \frac{2}{3}.$$

**Ví dụ 8:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD, đáy lớn là AD và  $AD = 2BC$ . Gọi O là giao điểm của AC và BD, G là trọng tâm của tam giác SCD.

a) Chứng minh rằng OG song song (SBC).

b) Gọi M là trung điểm của SD. Chứng minh rằng  $CM // (SAB)$ .

**Giải**

a) Gọi H là trung điểm của SC.

$$\begin{aligned} BC // AD &\Rightarrow \frac{OD}{OB} = \frac{AD}{BC} = 2 \\ &\Rightarrow \frac{OD}{DB} = \frac{2}{3} = \frac{DG}{DH} \end{aligned}$$

$\Rightarrow OG // BH$  nên  $OG // (SBC)$ .

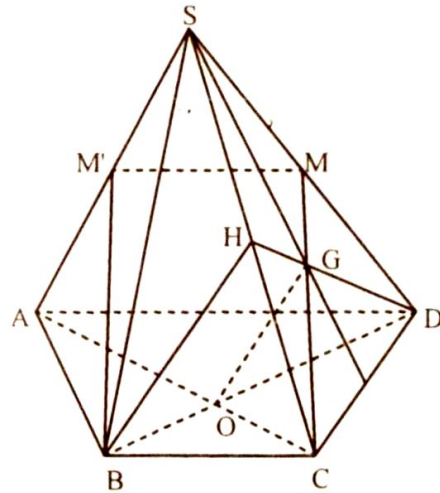
b) Gọi M' là trung điểm của SA

$$\Rightarrow MM' // AD \text{ và } MM' = \frac{AD}{2}.$$

Mặt khác vì  $BC // AD$  và  $BC = \frac{AD}{2}$  nên  $BC // MM'$  và  $BC = MM'$

Do đó tứ giác BCMM' là hình bình hành

$\Rightarrow CM // BM' \Rightarrow CM // (SAB)$



**Ví dụ 9:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một tứ giác lồi. Gọi M, I, J, O lần lượt là trung điểm của SD, AB, CD, IJ.

a) Chứng minh rằng nếu  $G_1, G_2$  lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và ABC thì  $G_1G_2$  song song MJ.

b) Chứng minh rằng tám đường thẳng mà mỗi đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh hình chóp và trọng tâm của tam giác tạo bởi ba đỉnh hình chóp không nằm trên cùng một mặt phẳng đồng quy tại một điểm G.

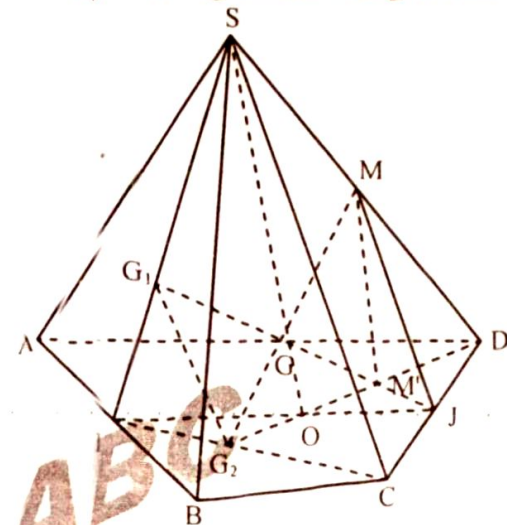
c) Chứng minh rằng điểm G nằm trên đoạn thẳng SO và  $GS = 4GO$ .

**Giải**

$$\text{a) Ta có } \frac{IG_1}{IS} = \frac{IG_2}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 // SC.$$

Mặt khác MJ là đường trung bình của tam giác DSC nên  $MJ // SC$ . Từ đó suy ra  $G_1G_2 // MJ$ .

b) Ta có tám đường thẳng đã cho không đồng phẳng; ta chỉ cần chứng minh chúng cắt nhau từng đôi một thì đồng quy.





Lấy hai đường thẳng bất kì trong tám đường thẳng trên, chẳng hạn như hai đường thẳng  $MG_2$  và  $JG_1$ . Theo câu a) thì  $G_1G_2 \parallel MJ$ , do đó  $MG_2$  và  $JG_1$  nằm trong mp( $G_1G_2JM$ ).

Vậy  $MG_2$  và  $JG_1$  cắt nhau  $\Rightarrow$  đpcm.

c) Xét mp( $ABCD$ ) ta có:  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = -3\overrightarrow{OG_2}$  (vì  $G_2$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ )

$\Rightarrow O, G_2, D$  thẳng hàng và  $OD = 3OG_2$ .

Xét ba mặt phẳng ( $G_1G_2JM$ ), ( $G_2MD$ ), ( $SIJ$ ), ta có

$(G_1G_2JM) \cap (G_2MD) = G_2M$ ;  $(G_1G_2JM) \cap (SIJ) = G_1J$ ;

$(G_2MD) \cap (SIJ) = SO$ .

Do đó 3 giao tuyến  $G_2M$ ,  $G_1J$  và  $SO$  đồng quy. Theo kết quả câu b) thì  $G_2M$  và  $G_1J$  cắt nhau tại  $G$ . Vậy điểm  $G$  nằm trên  $SO$ .

Vẽ  $MM'$  song song với  $SO$  và cắt  $G_2D$  tại  $M'$ , ta có:

$$OM' = M'D = \frac{1}{2}OD = \frac{3}{2}OG_2 \text{ và } \frac{OG}{MM'} = \frac{OG_2}{G_2M'} = \frac{OG_2}{\frac{5}{2}OG_2} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow OG = \frac{2}{5}MM' = \frac{1}{5}SO \Rightarrow GS = 4GO.$$

**Ví dụ 10:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ).

Gọi  $E, F$  theo thứ tự là trung điểm của  $SD, SB$ .

a) Xác định giao tuyến  $d$  của mp( $SAB$ ) và mp( $SCD$ ).

b) Dựng thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp( $AEF$ ).

c) Gọi  $I$  là giao điểm của  $SC$  và mp( $AEF$ ). Hãy xác định các giao điểm  $M$  và  $N$  qua các cặp đường thẳng  $CB$  và  $FI$ ,  $CD$  và  $EI$ . Chứng minh ba điểm  $M, N, A$  thẳng hàng.

**Giải**

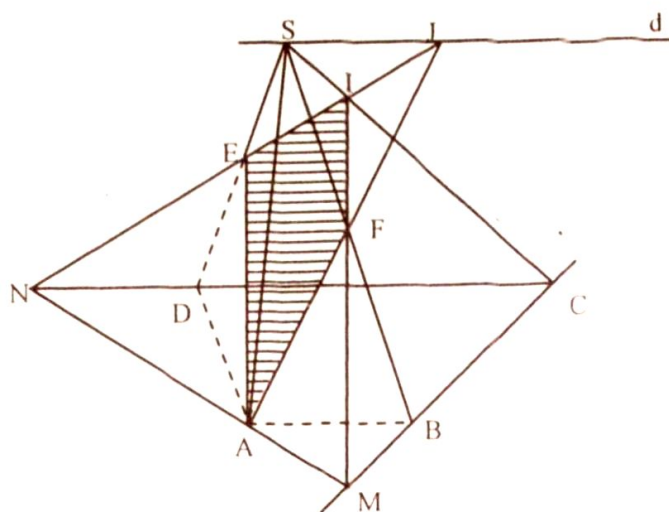
a) Vì  $AB \parallel CD$  nên giao tuyến  $d$  của 2 mp( $SAB$ ) và ( $SCD$ ) là đường thẳng đi qua  $S$  song song  $AB, CD$ .

b) Trong mp( $SAB$ ),  $d \cap AF = J$ .

Trong mp( $SCD$ ),  $SC \cap EJ = I$  thì  $AEIF$  là thiết diện cần dựng.

c) Vì  $E$  là trung điểm của  $SD$  và  $I$  không phải là trung điểm của  $SC$ . Do đó, trong mp( $SBC$ ) có  $IF \cap BC = M$  và trong mp( $d; DC$ ) có  $IE \cap DC = N$ .

Ba điểm  $A, M, N$  đều thuộc cùng hai mặt phẳng ( $ABCD$ ) và ( $AFE$ ) nên chúng thuộc giao tuyến và do đó chúng thẳng hàng.



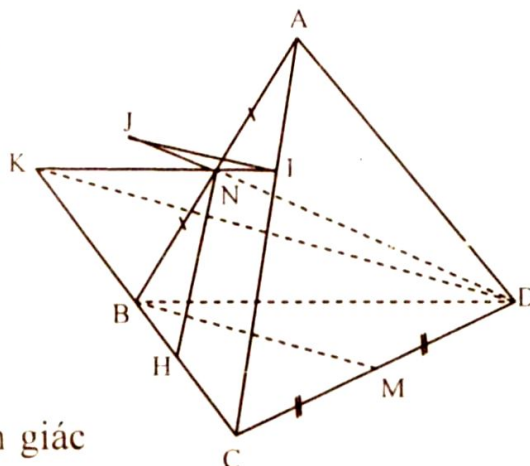


**Ví dụ 11:** Cho tứ diện đều ABCD có các cạnh bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và AB.

- a) Hãy xác định điểm  $I \in AC$ ,  $J \in DN$  sao cho  $IJ \parallel BM$ .  
b) Tính độ dài đoạn thẳng IJ theo a.

**Giải**

- a) Trong mp(BCD), từ D vẽ đường thẳng song song với BM cắt CB tại K. Nối K và N cắt AC tại I. Trong mp(IKD), từ I vẽ đường thẳng song song với DK cắt đường thẳng DN tại J. Khi đó theo cách dựng ta có  $IJ \parallel BM$ .  
b) Do BM là đường trung bình của tam giác



$$\text{CKD nên: } KD = 2BM = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

Gọi H là trung điểm của BC, khi đó:

$$NI \parallel AC \Rightarrow \frac{NK}{NI} = \frac{KH}{HC} = \frac{3HC}{HC} = 3$$

$$\Rightarrow NK = 3NI \Rightarrow KD = 3IJ. \text{ Vậy } IJ = \frac{1}{3}KD = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

**Ví dụ 12:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD với đáy là AD và BC. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD lần lượt tại P, Q.

- a) Chứng minh MN song song với PQ.  
b) Giả sử AM cắt BP tại E; CQ cắt DN tại F. Chứng minh rằng EF song song với MN và PQ. Tính EF theo a = AD và b = BC.

**Giải**

- a) Vì  $AD \parallel BC$  nên mp(ADJ) cắt (SBC) theo giao tuyến  $MN \parallel AD$ , BC và mp(BCI) cắt (SAD) theo giao tuyến  $PQ \parallel AD$ , BC.  
Vậy  $MN \parallel PQ$ .

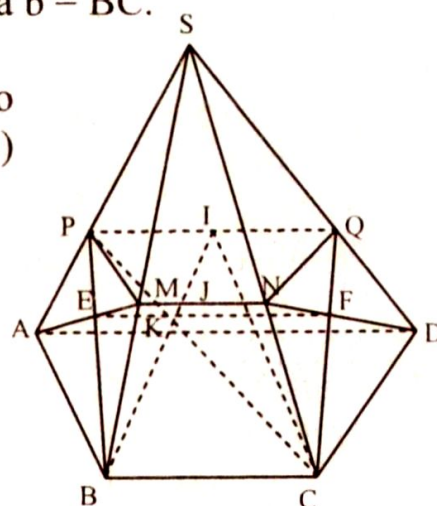
- b) Ta có:  $(AMND) \cap (PBCQ) = EF$   
và  $EF \parallel AD, BC, MN, PQ$

$$\text{Ta có } CP \cap EF = K \Rightarrow EF = EK + KF.$$

$$\text{Vì } PM \parallel AB \Rightarrow \frac{PE}{EB} = \frac{PM}{AB} = \frac{SP}{SA} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vì } FK \parallel BC \Rightarrow \frac{EK}{BC} = \frac{PE}{PB} = \frac{PE}{PE + EB} = \frac{2}{5} \Rightarrow EK = \frac{2}{5}b$$

$$\text{Trong tứ } KF = \frac{2}{5}a. \text{ Vậy } EF = \frac{2}{5}a + \frac{2}{5}b = \frac{2}{5}(a + b).$$





### C. BÀI LUYỆN TẬP

1. Cho hình chóp  $S.ABCD$ ,  $AC$  cắt  $DB$  tại  $O$ . Gọi  $M, N, P, Q$  là trung điểm của các cạnh  $SA, SB, SC, SD$ .
  - a) Chứng minh  $MP \parallel AC, NQ \parallel BD$
  - b) Chứng minh  $SO, MP, NQ$  đồng quy.**HD:** b)  $SO$  là giao tuyến của 2 mặt chéo
2. Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình thang với cạnh đáy  $AB$  và  $CD$  ( $AB > CD$ ). Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SB$ .
  - a) Chứng minh  $MN \parallel CD$ .
  - b) Tìm giao điểm  $P$  của  $SC$  và mặt phẳng  $(ADN)$ . Kéo dài  $AN$  và  $DP$  cắt nhau tại  $I$ . Chứng minh  $SI \parallel AB \parallel CD$ . Tứ giác  $SABI$  là hình gì?**ĐS:** b) Tứ giác  $SABI$  là hình bình hành
3. Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình chữ nhật. Gọi  $I, J, E, F$  là trọng tâm 4 mặt bên.
  - a) Chứng minh  $I, J, E, F$  đồng phẳng.
  - b) Chứng minh tứ giác  $IJEF$  là hình thoi.
4. Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy  $ABCD$  là hình thang với các cạnh đáy  $AB = 2CD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC$  và  $G$  là trọng tâm tam giác  $SAB$ .
  - a) Tìm giao tuyến của  $(SAB)$  và  $(IJG)$ .
  - b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng  $(IJG)$ .**HD:** b) giao tuyến song song
5. Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  là trung điểm của  $BC, BD$  và  $E$  thuộc cạnh  $AD$ .
  - a) Xác định thiết cắt bởi  $(IJE)$
  - b) Tìm vị trí  $E$  để thiết diện là hình bình hành.
  - c) Tìm điều kiện của tứ diện và vị trí  $E$  để thiết diện là hình thoi.**ĐS:** c)  $AB = CD$  và  $E$  là trung điểm của  $AD$
6. Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $SB$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $SAD$ .
  - a) Tìm giao điểm  $I$  của  $GM$  với  $(ABCD)$ . Chứng minh:  $I$  ở trên đường thẳng  $CD$  và  $IC = 2ID$ .
  - b) Tìm giao điểm  $J$  của  $(OMG)$  với  $AD$ . Tính  $JA / JD$ .
  - c) Tìm giao điểm  $K$  của  $(OMG)$  với  $SA$ . Tính  $KA / KS$ .**ĐS:** b)  $JA / JD = 2$       c)  $KA / KS = 2$
7. Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BC$ . Trên cạnh  $BD$ , ta lấy điểm  $K$  sao cho  $BK = 2KD$ .
  - a) Tìm giao điểm  $E$  của  $CD$  với  $(IJK)$ . Chứng minh:  $DE = DC$ .
  - b) Tìm giao điểm  $F$  của  $AD$  với  $(IJK)$ . Chứng minh:  $FA = 2FD$ .
  - c) Chứng minh  $FK$  song song với  $IJ$ .
  - d) Gọi  $M$  và  $N$  là hai điểm bất kỳ trên hai cạnh  $AB$  và  $CD$ . Tìm giao điểm của đường thẳng  $MN$  với mặt phẳng  $(IJK)$ .



8. Cho tứ diện ABCD. Lấy M, N, P, Q trên 4 cạnh AB, BC, CD, DA.  
 Chứng minh M, N, P, Q đồng phẳng khi và chỉ khi:  $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1$
- HD:** trong phần đảo, giả sử mặt phẳng (MNP) cắt cạnh AD tại Q' rồi Chứng minh Q'  $\equiv$  Q.
9. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (Q).  
 a) Giả sử  $a // b$  và  $b // (Q)$ . Vị trí tương đối của a và (Q)?  
 b) Giả sử  $a // (Q)$  và  $b // (Q)$ . Có thể kết luận gì về a và b?
10. a) Nếu  $a // b$  và  $b \subset (Q)$  thì a và (Q) ?  
 b) Nếu  $a // (Q)$  và  $b \subset (Q)$  thì a và b ?  
 c) Nếu  $a // (Q)$  và (P) chứa a, (P) cắt (Q) theo giao tuyến d thì a và d thế nào?
11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một tứ giác lồi. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (Q) đi qua O, song song với AC và SB. Thiết diện đó là hình gì?  
**HD:** dùng tính chất giao tuyến song song
12. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một hình bình hành.  
 Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua điểm M của cạnh AB, song song với BD và SA.
13. Cho tứ diện ABCD. Mặt phẳng (P) song song AB, CD.  
 a) Chứng minh thiết diện là hình bình hành.  
 b) Tìm quỹ tích tâm O của thiết diện  
 c) Định vị trí (P) cắt cạnh AC để thiết diện là hình thoi.
14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD.  
 a) Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD)  
 b) Gọi P là trung điểm SA. Chứng minh: SB, SC song song với mặt phẳng (MNP).  
 c) Gọi  $G_1, G_2$  là trọng tâm tam giác ABC, SBC. Chứng minh đường thẳng  $G_1G_2$  song song với mặt phẳng (SAC).  
**HD:** c) dùng tính chất tỉ lệ của trọng tâm
15. Cho tứ diện ABCD. Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ABD. Chứng minh điều kiện cần và đủ để OO' song song với (BCD) là:  $\frac{BC}{BD} = \frac{AB + AC}{AB + AD}$ .  
**HD:** dùng tính chất tỉ lệ của đường phân giác cắt chia cạnh đối
16. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi C' là trung điểm của SC, M là một điểm di động trên cạnh SA, (P) là mặt phẳng luôn qua C'M và song song với BC.  
 a) Chứng minh: (P) luôn chứa một đường thẳng cố định.  
 b) Xác định thiết diện mà (P) cắt hình chóp S.ABCD. Định M để thiết diện là hình bình hành.



c) Tìm tập hợp giao điểm của hai cạnh đối của thiết diện.

15. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các cạnh AD và BE lần lượt lấy các điểm M, N lưu động sao cho  $AM/AD = BN/BE$ .

a) Chứng minh MN luôn song song với 1 mặt phẳng cố định

b) Tìm tập hợp trung điểm I của MN.

**HD:** b) dùng đường trung bình

16. Cho hình chóp S.ABCD. M, N là hai điểm trên AB, CD, (P) là mặt phẳng qua MN và song song với SA.

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P).

b) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.

**ĐS:** b) MN song song với BC

17. Trong mặt phẳng (Q) cho tam giác ABC vuông tại A, góc  $B = 60^\circ$ ,  $AB = a$ . Gọi O là trung điểm của BC. Lấy điểm S ở ngoài (Q), sao cho  $SB = a$  và  $SB \perp OA$ . Gọi M là một điểm trên cạnh AB, mặt phẳng (P) qua M và song song với SB và OA, cắt BC, SC, SA lần lượt tại N, P, Q. Đặt  $x = BM$  ( $0 < x < a$ ).

a) Chứng minh MNPQ là hình thang vuông.

b) Tính theo a và x diện tích của hình thang này. Tính x để diện tích này là lớn nhất.

**HD:** b) dùng bất đẳng thức Côsi, kết quả  $x = \frac{2a}{3}$

18. Cho tứ diện đều ABCD, cạnh a. I là trung điểm của AC, J là một điểm trên cạnh AD sao cho  $AJ = 2JD$ . M là một điểm di động trong tam giác BCD sao cho (MIJ) song song với AB.

a) Tìm tập hợp điểm M.

b) Tính diện tích thiết diện cắt bởi mặt phẳng (MIJ).

**ĐS:** b)  $S = \frac{5a^2\sqrt{3}}{7}$

19. Cho hình chóp S.ABC. Gọi O là một điểm bên trong tam giác ABC. Qua O vẽ những đường thẳng lần lượt song song với SA, SB, SC cắt các mặt (SBC), (SCA), (SAB) tại A', B', C'. Định O để tích  $OA' \cdot OB' \cdot OC'$  có giá trị lớn nhất.

**HD:** Chứng minh  $\frac{OA'}{SA} + \frac{OB'}{SB} + \frac{OC'}{SC} = 1$

20. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Điểm M là một điểm di động trên SC, (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD.

a) Chứng minh: (P) luôn chứa một đường thẳng cố định.

b) Tìm các giao điểm H và K của (P) với SB, SD.

Chứng minh  $\frac{SB}{SH} + \frac{SD}{SK} - \frac{SC}{SM}$  có giá trị không đổi.

**ĐS:** b) giá trị bằng 1 không đổi.

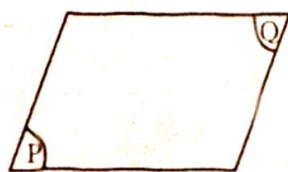


## §3. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

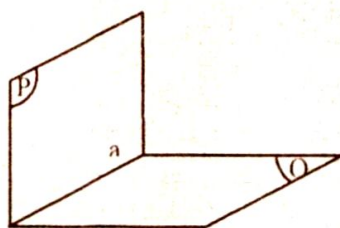
### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Hai mặt phẳng song song

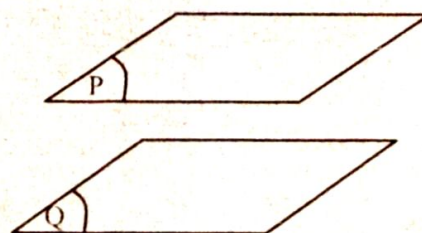
- Hai mặt phẳng song song nếu chúng không có điểm chung.
- Vị trí tương đối của 2 mặt phẳng: Có 3 vị trí tương đối là 2 mặt trùng nhau, 2 mặt cắt nhau và 2 mặt song song.



$$(P) \equiv (Q)$$



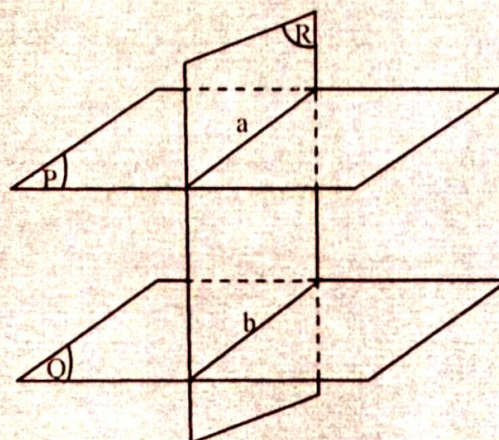
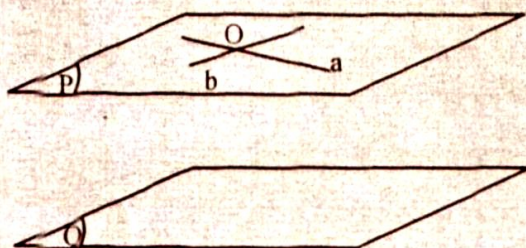
$$(P) \cap (Q) = a$$



$$(P) // (Q)$$

- Định lý cơ bản:

- Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).
- Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.
- Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì có duy nhất một mặt phẳng (P) chứa a và song song với (Q).
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.





• Định lý Ta-lét:

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn ra trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

• Định lý Ta-lét đảo:

Giả sử trên hai đường thẳng  $a$  và  $a'$  lần lượt lấy các điểm  $A, B, C$  và  $A', B', C'$  sao cho:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

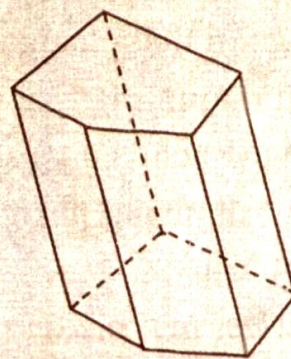
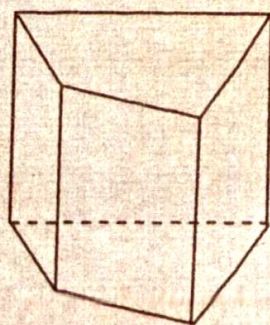
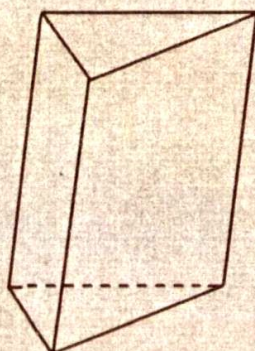
Khi đó, ba đường thẳng  $AA', BB', CC'$  lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, tức là chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Chú ý: Đẳng thức kép để bảo đảm thứ tự của  $A, B, C$  và  $A', B', C'$  như nhau.

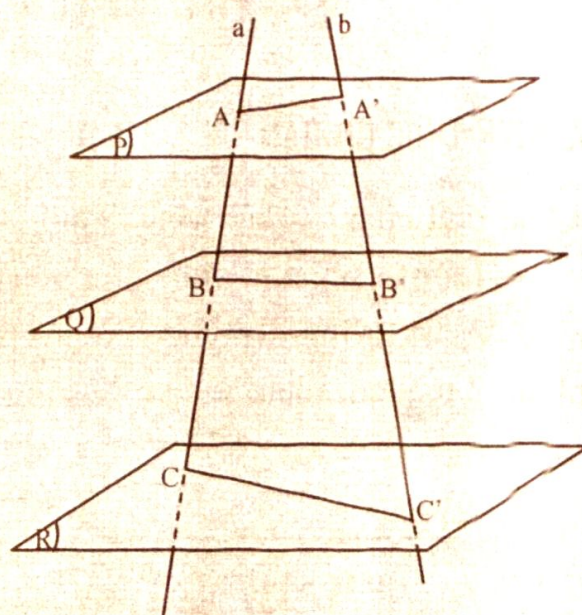
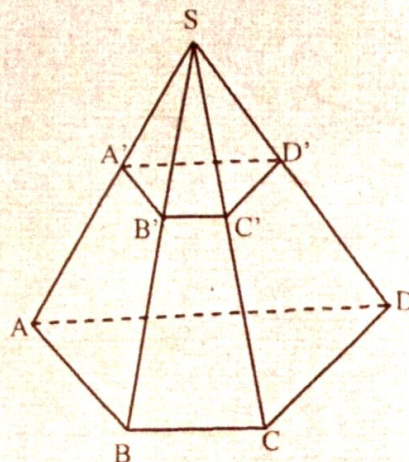
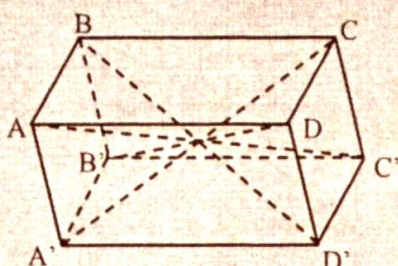
• HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

- Hình lăng trụ có 2 đáy là 2 mặt song song và bằng nhau, các cạnh bên song song và bằng nhau.

Nếu đáy là hình lăng trụ là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... thì lăng trụ tương ứng được gọi là lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác, lăng trụ ngũ giác, ...



- Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.





- Hình chóp cắt tạo nên khi cắt hình chóp bởi một mặt phẳng song song với đáy.

Tùy theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... ta có hình chóp cắt tam giác, hình chóp cắt tứ giác, hình chóp cắt ngũ giác, ...

Hình chóp cắt  $A'_1A'_2...A'_n.A_1A_2...A_n$  có:

Hai đáy là hai đa giác có cạnh tương ứng song song và tỉ số các cạnh tương ứng bằng nhau. Các mặt bên là những hình thang. Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.

## B. PHÂN DẠNG TOÁN

### DẠNG 1: CHỨNG MINH SONG SONG

• Hai mặt phẳng song song khi thoả một trong các điều kiện:

- Hai mặt phẳng không có điểm chung.
- Khi một mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau và cùng song song với một mặt phẳng kia.
- Khi hai đường thẳng cắt nhau của một mặt phẳng lần lượt song song với hai đường thẳng của mặt phẳng còn lại.
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba.
- Định lý Talet đảo

Chú ý: Chứng minh 2 đường thẳng song song, đường thẳng song song với mặt phẳng, ngoài các cách đã biết thì có thêm:

- Nếu hai mặt phẳng song song bị cắt bởi mặt phẳng thứ ba thì hai giao tuyến song song với nhau.
- Nếu 2 mặt phẳng song song, mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này thì song song với mặt phẳng kia.

**Ví dụ 1:** Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ABD. Chứng minh rằng mp(MNP) song song mp(BCD).

**Giải**

Gọi I, J và K lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD và BD.

Theo tính chất trọng tâm của tam giác ta có:

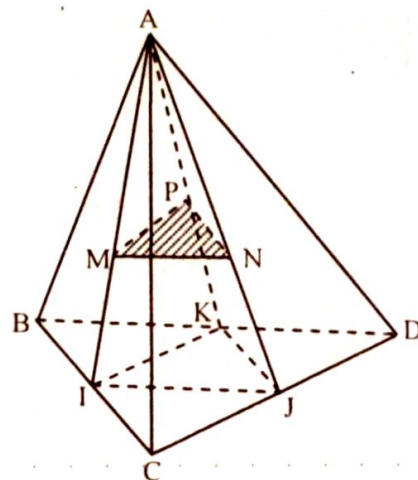
$$\frac{AM}{AI} = \frac{AN}{AJ} = \frac{AP}{AK} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow MN \parallel IJ.$$

$$\text{Mà } IJ \subset (BCD)$$

$$\Rightarrow MN \parallel (BCD).$$

$$\text{Tương tự ta có } NP \parallel (BCD).$$

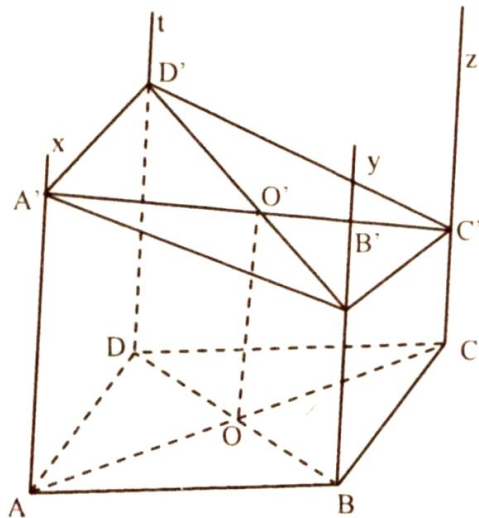




$Mp(MNP)$  chứa 2 đường thẳng cắt nhau  $MN$  và  $NP$  cùng song song với  $mp(BCD)$ . Vậy  $(MNP) // (BCD)$ .

**Ví dụ 2:** Từ bốn đỉnh của hình bình hành  $ABCD$  vẽ bốn nửa đường thẳng song song cùng chiều  $Ax, By, Cz$  và  $Dt$  sao cho chúng cắt mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt bốn nửa đường thẳng theo thứ tự nói trên tại  $A', B', C'$  và  $D'$ . Chứng minh:

- $(Ax, By) // (Cz, Dt), (Ax, Dt) // (By, Cz)$ .
- Tứ giác  $A'B'C'D'$  là hình bình hành.
- $AA' + CC' = BB' + DD'$ .



**Giải**

a) Ta có  $Ax // Dt \Rightarrow Ax // (Cz, Dt)$

$$AB // DC \Rightarrow AB // (Cz, Dt)$$

Vì  $mp(Ax, By)$  chứa 2 đường thẳng  $Ax, AB$  cắt nhau cùng song song với  $(Cy, Dt)$  nên  $(Ax, By) // (Cz, Dt)$ .

Tương tự  $(Ax, Dt) // (By, Cz)$ .

b) Mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt 2 cặp mặt phẳng song song  $(Ax, By)$  và  $(Cz, Dt)$ ;  $(Ax, Dt)$  và  $(By, Cz)$  theo các giao tuyến  $A'B' // D'C', A'D' // B'C'$  nên  $A'B'C'D'$  là hình bình hành.

c) Gọi  $O, O'$  lần lượt là tâm các hình bình hành  $ABCD, A'B'C'D'$ . Ta có  $OO'$  là đường trung bình của hình thang  $AA'C'C$  nên có

$$OO' = \frac{AA' + CC'}{2}.$$

$$\text{Tương tự chứng minh được } OO' = \frac{BB' + DD'}{2}.$$

$$\text{Vậy } AA' + CC' = BB' + DD'.$$

**Ví dụ 3:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SD$ .

a) Chứng minh rằng  $(OMN)$  song song với  $(SBC)$ .

b) Gọi  $P$  và  $Q$  là trung điểm của  $AB$  và  $ON$ . Chứng minh  $PQ$  song song với  $(SBC)$ .

**Giải**

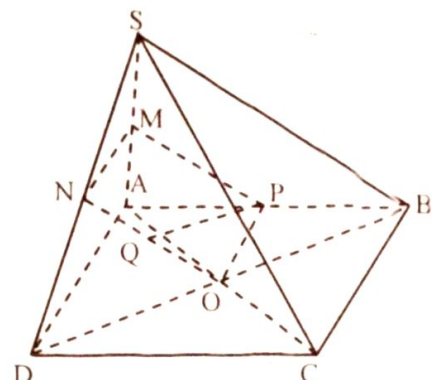
a) Ta có  $OM // SC$  (đường trung bình).

$$\Rightarrow OM // (SBC).$$

Vì  $ON // SB$  (đường trung bình).

$$\Rightarrow ON // (SBC)$$

Do đó  $mp(OMN)$  chứa 2 đường thẳng  $OM, ON$  cắt nhau, cùng song song với  $mp(SBC)$  nên  $(OMN) // (SBC)$ .





b) Ta có:  $OP \parallel AD$  (đường trung bình tam giác ABD)

Mà  $AD \parallel MN$ , suy ra  $OP \parallel MN \Rightarrow PQ \subset (OMN)$  mà  $(OMN) \parallel (SBC)$ .  
 Vậy  $PQ \parallel (SBC)$ .

**Ví dụ 4:** Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc các đường chéo AC, BF sao cho  $MC = 2AM$ ;  $NF = 2BN$ . Qua M, N vẽ các đường thẳng song song với AB cắt các cạnh AD, AF lần lượt tại  $M_1, N_1$ .

a) Chứng minh rằng:  $MN \parallel DE$

b) Chứng minh rằng:  $M_1N_1 \parallel mp(DEF)$ ;

c) Chứng minh rằng:  $mp(MNN_1M_1) \parallel mp(DEF)$ .

**Giải**

a) Gọi O là giao điểm của 2 chéo AC và BD.

$$\text{Vì } \frac{AM}{MC} = \frac{1}{2} \text{ nên } AM = \frac{2}{3}AO$$

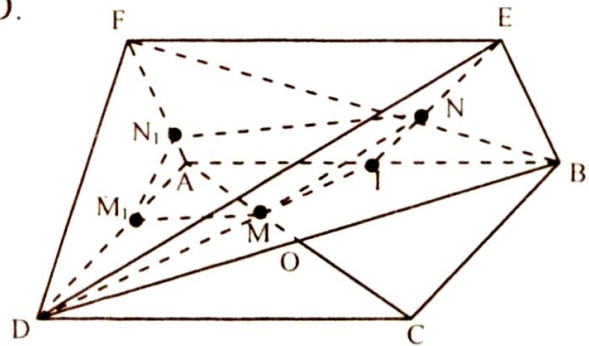
Do đó M là trọng tâm tam giác ABD hay M thuộc trung tuyến DI của tam giác ABD. Chứng minh tương tự thì N thuộc đường trung tuyến EI của tam giác ABE. Xét tam giác EID.

$$\text{Ta có: } \frac{IN}{IE} = \frac{IM}{ID} \Rightarrow NM \parallel DE.$$

$$\text{b) Vì } MM_1 \parallel CD \Rightarrow \frac{AM_1}{M_1D} = \frac{AM}{MC} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vì } NN_1 \parallel AB \Rightarrow \frac{AN_1}{N_1F} = \frac{BN}{NF} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Do đó } \frac{AM_1}{M_1D} = \frac{AN_1}{N_1F} \Rightarrow M_1N_1 \parallel DF \Rightarrow M_1N_1 \parallel (DEF).$$

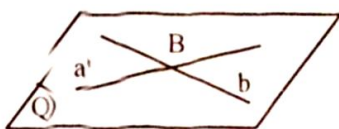
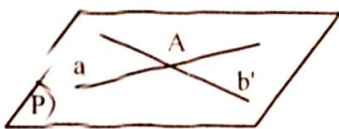


c) Ta có  $NN_1 \parallel EF$  nên  $NN_1 \parallel (DEF)$ .

Mặt phẳng  $(MM_1N_1N)$  chứa 2 đường thẳng cắt nhau  $M_1N_1, NN_1$  cùng song song với  $(DEF)$  nên  $(MM_1N_1N) \parallel (DEF)$ .

**Ví dụ 5:** Cho hai đường thẳng chéo nhau. Chứng minh rằng có đúng hai mặt phẳng song song với nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng đó.

**Giải**



Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau. Qua một điểm A thuộc a, vẽ đường thẳng b' song song với b và qua một điểm B thuộc b vẽ đường thẳng a' song song với a.

Gọi (P) là  $mp(a; b')$ , (Q) là  $mp(b; a')$  thì  $(P) \parallel (Q)$ .

Giả sử còn có  $mp(P')$  và  $mp(Q')$  lần lượt qua a và b và song song với nhau. Khi đó ta có  $b' \parallel (P')$  và  $b \parallel (P)$  suy ra giao tuyến a của (P) và (P') cũng song song với b, trái với giả thiết. Vậy (P') trùng (P) và do đó (Q') trùng (Q): đpcm.

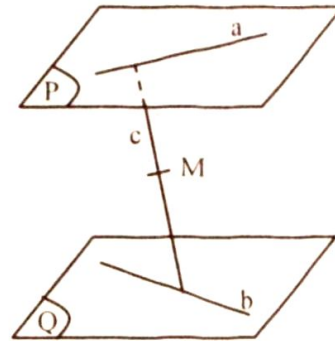
ABC



**Ví dụ 6:** Cho hai đường thẳng chéo nhau  $a$  và  $b$  lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song  $(P)$  và  $(Q)$ . Chứng minh rằng nếu điểm  $M$  không nằm trên  $(P)$  và không nằm trên  $(Q)$  thì có duy nhất một đường thẳng đi qua  $M$  cắt cả  $a$  và  $b$ .

**Giải**

Giả sử  $c = mp(M; a) \cap mp(M; b)$ .  
Ta cần chứng minh  $c$  cắt cả  $a$  và  $b$ .  
Vì  $c$  và  $a$  phân biệt cùng nằm trên một mặt phẳng nên hoặc  $c \parallel a$  hoặc  $c$  cắt  $a$ . Cũng vậy, hoặc  $c \parallel b$  hoặc  $c$  cắt  $b$ .

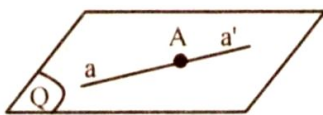


Không thể xảy ra đồng thời  $c \parallel a$ ,  $c \parallel b$  vì  $a$  và  $b$  chéo nhau. Giả sử  $c$  song song với  $a$  thì phải cắt  $b$ , tức là  $c$  đi qua một điểm của  $mp(Q)$  và song song với  $a$ , suy ra  $c$  phải thuộc  $mp(Q)$  và do đó  $M$  thuộc  $(Q)$  (trái với giả thiết). Tương tự, không thể có  $c$  song song với  $b$ . Tóm lại  $c$  phải cắt cả  $a$  và  $b$ .

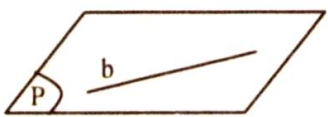
Giả sử có đường thẳng  $c'$  khác  $c$  đi qua  $M$ , cắt cả  $a$  và  $b$  thì  $a$  và  $b$  đồng phẳng: Vô lí.

**Ví dụ 7:** Cho mặt phẳng  $(P)$  và một điểm  $A$  nằm ngoài  $(P)$ . Chứng minh rằng tất cả những đường thẳng đi qua  $A$  và song song với  $(P)$  đều cùng nằm trong một mặt phẳng  $(Q)$  song song với  $(P)$ .

**Giải**



Gọi  $(Q)$  là mặt phẳng duy nhất đi qua  $A$  và song song với  $(P)$ . Giả sử  $a$  là một đường thẳng bất kì qua  $A$  và song song với  $(P)$ . Ta phải chứng minh đường thẳng  $a$  nằm trên  $(Q)$ .

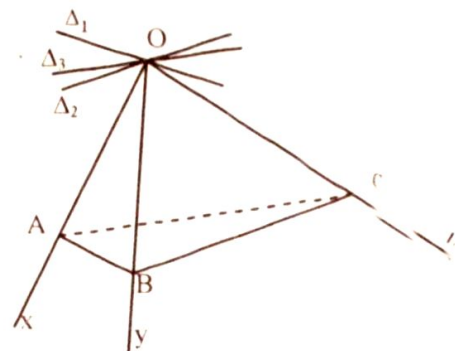


Vì  $a \parallel (P)$  nên có đường thẳng  $b$  thuộc  $(P)$  sao cho  $a$  và  $b$  song song. Vậy  $mp(a; b)$  cắt  $(Q)$  theo giao tuyến  $a'$  qua  $A$  và song song với  $b$ . Do đó  $a$  trùng với  $a'$ , tức là  $a$  nằm trên  $(Q)$ .

**Ví dụ 8:** Cho ba tia  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  không đồng phẳng. Chứng minh rằng các tia phân giác ngoài của các góc  $xOy$ ,  $yOz$  và  $zOx$  đồng phẳng.

**Giải**

Gọi  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  lần lượt là ba đường phân giác ngoài của các góc  $xOy$ ,  $yOz$ ,  $zOx$ . Trên các tia  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  lần lượt lấy các điểm  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sao cho  $OA = OB = OC$ , tam giác cân  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OCA$  tại  $O$  nên phân giác ngoài tại đỉnh song song với cạnh đáy, do đó  $\Delta_1 \parallel AB$ ,  $\Delta_2 \parallel BC$ ,  $\Delta_3 \parallel CA$ .





Do đó  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \parallel (ABC)$  mà chúng qua O nên  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  đồng phẳng trên mặt phẳng qua O, song song với  $(ABC)$ .

**Ví dụ 9:** Cho tứ diện ABCD và bốn điểm M, N, E, F lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC, CD và DA. Chứng minh rằng: Nếu bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng thì  $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} = 1$

**Giải**

Vẽ đường thẳng  $\Delta$  bất kì cắt mặt phẳng (MNEF) tại một điểm O. Bốn mặt phẳng lần lượt qua A, B, C, D và đồng thời song song với mặt phẳng (MNEF) cắt đường thẳng  $\Delta$  theo thứ tự tại  $A', B', C', D'$ .

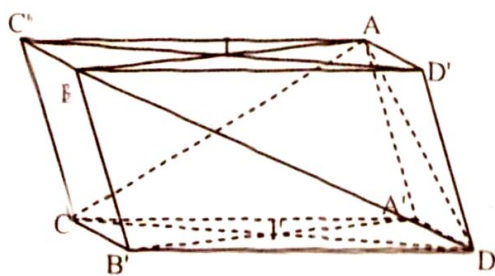
Theo định lý Ta-lét ta có:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{OA'}{OB'}, \quad \frac{NB}{NC} = \frac{OB'}{OC'},$$

$$\frac{EC}{ED} = \frac{OC'}{OD'}, \quad \frac{FD}{FA} = \frac{OD'}{OA'}$$

Vậy:  $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} = \frac{OA'}{OB'} \cdot \frac{OB'}{OC'} \cdot \frac{OC'}{OD'} \cdot \frac{OD'}{OA'} = 1.$

**Ví dụ 10:** Cho tứ diện ABCD. Hãy dựng một hình hộp ngoại tiếp tứ diện đó (tức là dựng một hình hộp sao cho mỗi cạnh của tứ diện là đường chéo của một mặt của hình hộp).



**Giải**

Qua mỗi cạnh của hình tứ diện ABCD ta dựng một mặt phẳng song song với cạnh đối diện. Khi đó sáu mặt phẳng vừa dựng sẽ cắt nhau tạo thành một hình hộp cần tìm có sáu mặt bên nằm trên sáu mặt phẳng nói trên.

Cách khác: Qua trung điểm I của AB ta dựng đoạn thẳng  $C'D'$  bằng đoạn CD sao cho  $C'D' \parallel CD$  và I là trung điểm của  $C'D'$ . Qua trung điểm  $I'$  của CD ta dựng đoạn  $A'B'$  bằng đoạn AB sao cho  $A'B' \parallel AB$  và  $I'$  là trung điểm của  $A'B'$ . Khi đó  $AC'BD', A'CB'D$  là hình hộp cần dựng.

**Ví dụ 11:** Chứng minh định lý Ta-let đảo: Trên 2 đường thẳng chéo nhau a và b lần lượt lấy các điểm A, B, C và  $A', B', C'$  sao cho  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$ , khi đó ba đường thẳng  $AA', BB', CC'$  lần lượt nằm trên 3 mặt phẳng song song, do đó chúng cùng song song với một mặt phẳng.

ABC



## Giải

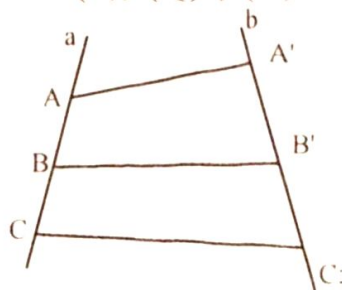
Vì  $a$  và  $a'$  chéo nhau nên hai đường thẳng  $AA'$  và  $BB'$  chéo nhau nên có hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  song song, lần lượt đi qua  $AA'$  và  $BB'$ . Qua  $C$  dựng  $mp(R)$  song song với  $mp(P)$  cắt  $a'$  tại  $C''$ . Do  $(P), (Q), (R)$  đôi một song song nên theo định lý Ta-let ta có:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C''} = \frac{CA}{C''A'}$$

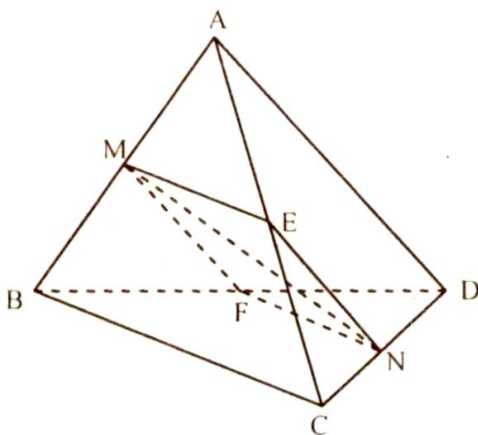
$$\text{Mà } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

nên ta có  $B'C'' = B'C'$  và  $C''A' = C'A'$ .

Vậy  $C'' \equiv C'$ . Suy ra ba đường thẳng  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  nằm trên ba mặt phẳng song song. Do đó chúng cùng song song với một mặt phẳng.



**Ví dụ 12:** Cho tứ diện ABCD. Gọi M là trung điểm của AB. Hỏi mặt phẳng (P) qua điểm M, song song với cả AD và BC có đi qua trung điểm N của CD không?



## Giải

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng AD và song song với BC; (R) là mặt phẳng chứa đường thẳng BC và song song với AD. Ta có ba mặt phẳng (P), (Q) và (R) đôi một song song, nên theo định lí Ta-let ta có:

$$\frac{AM}{DN'} = \frac{MB}{N'C} = \frac{BA}{CD}$$

với  $N' = CD \cap (P)$ .

Mặt khác  $AM = BM$  nên  $N'$  là trung điểm của  $CD$ , tức là  $N'$  trùng với  $N$ .  
 Vậy  $mp(P)$  đi qua  $N$ .

## DANG 2: LĂNG TRU VÀ HÌNH HỘP

- Hình lăng trụ có hai mặt đáy là hai hình đa giác có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau, có các mặt bên là những hình bình hành, có các cạnh bên song song và bằng nhau.
- Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.
- Trong mỗi hình hộp, bốn đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, điểm cắt nhau đó gọi là tâm hình hộp.

Chú ý: Sử dụng các quan hệ song song, giao tuyến song song, quan hệ các yếu tố trong lăng trụ và hình hộp, kết hợp với kiến thức hình học phẳng để giải toán.



**Ví dụ 1:** Cho lăng trụ tam giác  $A'B'C'.ABC$ . Gọi  $I$ ,  $G$  và  $K$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $ABC$ ,  $ACC'$  và  $A'B'C'$ .

Chứng minh: a)  $(IGK) \parallel (BB'C'C)$       b)  $(A'GK) \parallel (AIB')$ .

**Giải**

a) Gọi  $M$  và  $M'$  tương ứng là trung điểm của  $AC$  và  $A'C'$ .

Theo tính chất trọng tâm của tam giác ta có:

$$\frac{MI}{MB} = \frac{MG}{MC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow IG \parallel BC'$$

$$\Rightarrow IG \parallel (BB'C'C).$$

$$\frac{MI}{MB} = \frac{M'K}{M'B'}$$

$$\text{và } MM' \parallel BB' \Rightarrow IK \parallel BB'.$$

$$\Rightarrow IK \parallel (BB'C'C).$$

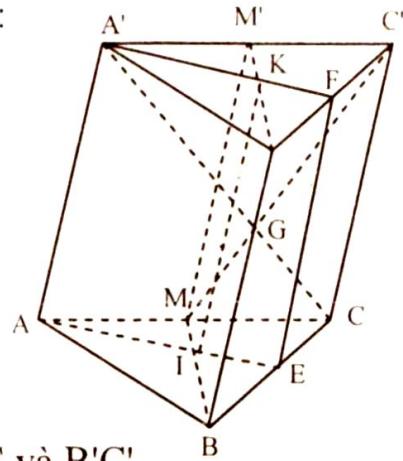
Vậy  $(IGK) \parallel (BB'C'C)$ .

b) Gọi  $E$  và  $F$  tương ứng là trung điểm của  $BC$  và  $B'C'$

$$\Rightarrow B'E \parallel CF \Rightarrow B'E \parallel (A'CF).$$

$$\text{Mà } AE \parallel A'F \Rightarrow AE \parallel (A'CF).$$

Do đó  $(AEB') \parallel (A'CF)$  hay  $(AIB') \parallel (A'GK)$ .



**Ví dụ 2:** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $G$ ,  $G'$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$ . Một mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt các cạnh  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $GG'$  lần lượt tại  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  và  $G_1$ . Chứng minh rằng:

a)  $GG'$  song song và bằng cạnh bên của hình lăng trụ.

b)  $G_1$  là trọng tâm của tam giác  $A_1B_1C_1$ .

$$\text{c) } G_1G' = \frac{1}{3}(A_1A' + B_1B' + C_1C'); G_1G = \frac{1}{3}(A_1A + B_1B + C_1C).$$

**Giải**

a) Gọi  $I$ ,  $I'$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC$ ,  $B'C'$  thì  $II'$  song song và bằng  $AA'$  nên tứ giác  $AI'I'A'$  là hình bình hành, do đó  $AI$  song song và bằng  $A'I'$ .

$$\text{Ta có } AG = \frac{2}{3}AI, A'G' = \frac{2}{3}A'I',$$

mà  $AI = A'I'$  nên  $AG$  song song và bằng  $A'G'$ .

Do đó tứ giác  $AGG'A'$  là hình bình hành.

Vậy  $GG'$  song song và bằng  $AA'$ .

b)  $B_1C_1$  cắt  $II'$  tại  $I_1$  thì  $I_1$  là trung điểm của  $B_1C_1$  và ta có  $AA_1 \parallel GG_1 \parallel II_1$

$$\text{nên: } \frac{G_1A_1}{A_1I_1} = \frac{GA}{AI} = \frac{2}{3}. \text{ Vậy } G_1 \text{ là trọng tâm tam giác } A_1B_1C_1.$$

c) Gọi  $I_2$  là giao điểm của hai đường thẳng  $A'G_1$  và  $II'$ .

$$\text{Ta có } I_1I_2 = \frac{1}{2}A_1A', I_1I' = \frac{1}{2}(B_1B' + C_1C'), G_1G' = \frac{2}{3}I_2I'$$



$$\begin{aligned} \text{nên: } G_1G' &= \frac{2}{3}I_2I' = \frac{2}{3}(I_2I_1 + I_1I') = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}A_1A' + \frac{1}{2}(B_1B' + C_1C')\right] \\ &= \frac{1}{3}(A_1A' + B_1B' + C_1C'). \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự } G_1G = \frac{1}{3}(A_1A + B_1B + C_1C).$$

**Ví dụ 3:** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có các cạnh bên là  $AA', BB', CC'$ . Gọi  $I$  và  $I'$  lần lượt là trung điểm của hai cạnh  $BC$  và  $B'C'$ .

- Chứng minh rằng  $AI \parallel A'I'$ .
- Tìm giao điểm của  $IA'$  với mặt phẳng  $(AB'C')$ .
- Chứng minh giao tuyến của  $(AB'C')$  và  $(A'BC)$  song song với  $BC$ .

**Giải**

- Ta có  $II' \parallel BB'$  và  $II' = BB'$ . Mà  $AA' \parallel BB'$  và  $AA' = BB'$

nên:  $AA' \parallel II'$  và  $AA' = II'$

$\Rightarrow AA'I'I$  là hình bình hành.

Vậy  $AI \parallel A'I'$ .

- Trong mp( $AA', II'$ ):  $IA' \cap AI' = E$

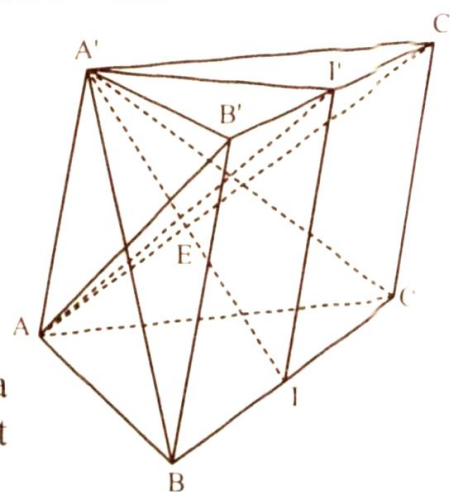
thì  $E \in IA'; E \in AI'$

$\Rightarrow E \in IA', E \in (AB'C')$ .

Do đó  $IA' \cap (AB'C') = E$ .

- Ta có  $E$  thuộc 2 mp  $(AB'C')$  và  $(A'BC)$ . Ba mặt phẳng  $(AB'C')$ ,  $(A'BC)$ ,  $(BB'CC')$  cắt nhau theo 3 giao tuyến  $BC, B'C', E$  phân biệt.

Vì  $BC \parallel B'C'$  nên giao tuyến  $E$  //  $BC, B'C'$ .

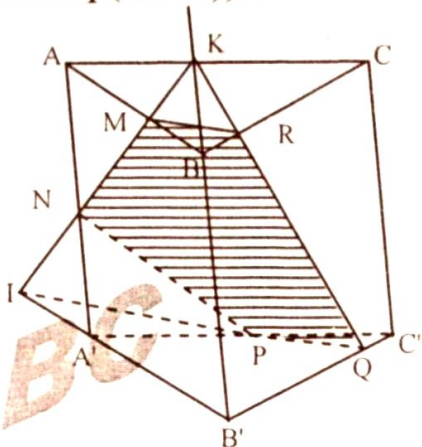


**Ví dụ 4:** Chứng minh rằng nếu hình lăng trụ tam giác có thiết diện là một hình ngũ giác thì hai cạnh của ngũ giác đó song song.

**Giải**

Vì hình lăng trụ tam giác có 5 mặt, nên nếu thiết diện là một ngũ giác thì 5 cạnh ngũ giác đó lần lượt nằm trên 5 mặt của lăng trụ. Do đó có hai cạnh nằm trên hai mặt đáy của lăng trụ là 2 giao tuyến song song.

**Ví dụ 5:** Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, AA', A'C'$ . Hãy dựng thiết diện của lăng trụ khi cắt bởi mp( $MNP$ )).



**Giải**

Trong mp( $AA', BB'$ ) đường thẳng  $MN$  cắt  $A'B'$  và  $BB'$  lần lượt tại  $I$  và  $K$ . Trong mp( $A'B'C'$ ),  $IP$  cắt  $B'C'$  tại  $Q$ , và trong mp( $BB', CC'$ )  $KQ$  cắt  $BC$  tại  $R$ .

Vậy thiết diện là ngũ giác  $MNPQR$ .

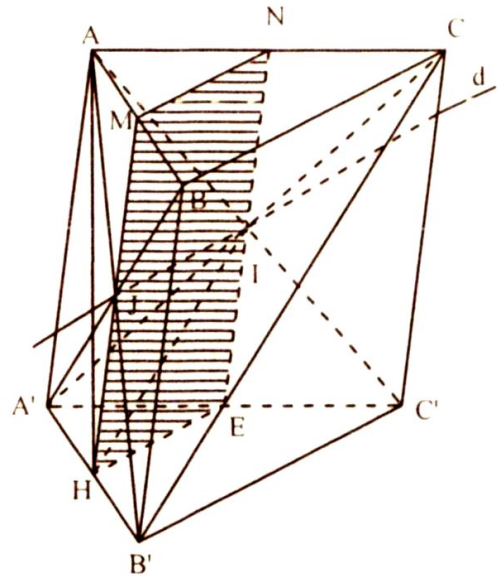


**Ví dụ 6:** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $H$  là trung điểm của cạnh  $A'B'$ .

- Chứng minh rằng đường thẳng  $CB'$  song song với  $mp(AHC')$ .
- Tìm giao tuyến  $d$  của hai mặt phẳng  $(AB'C')$  và  $(A'BC)$ . Chứng minh rằng  $d$  song song với  $mp(BB'C'C)$ .
- Xác định thiết diện của hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  khi cắt bởi  $mp(H; d)$ .

**Giải**

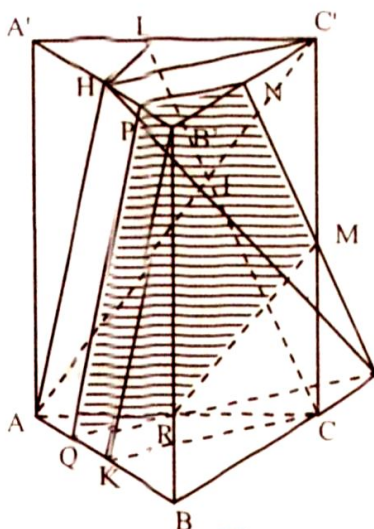
- Gọi  $I$  là tâm của hình bình hành  $AA'C'C$ . Xét tam giác  $A'B'C$  thì  $HI$  là một đường trung bình của nó, nên  $CB' \parallel HI$ . Mặt khác  $HI$  nằm trong mặt phẳng  $(AHC')$  nên  $CB' \parallel mp(AHC')$ .
- Gọi  $J$  là tâm của hình bình hành  $AA'B'B$ . Ta có  $I, J$  là hai điểm chung của hai mặt phẳng  $(AB'C')$  và  $(A'BC)$ . Vậy giao tuyến  $d$  của chúng là đường thẳng  $IJ$ . Vì  $d \parallel B'C'$  nên  $d \parallel (BB'C'C)$ .
- Đường thẳng  $HJ$  cắt  $AB$  tại  $M$ . Ta có  $AA' \parallel HM$ , suy ra  $AA' \parallel mp(H; d)$  nên  $mp(AA'C'C)$  cắt  $mp(H; d)$  theo giao tuyến qua  $I$  và song song với  $AA'$ . Giao tuyến này cắt  $AC$  và  $A'C'$  lần lượt tại  $N$  và  $E$ . Vậy thiết diện là hình bình hành  $MNEH$ .



**Ví dụ 7:** Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $H$  là trung điểm của  $A'B'$ .

- Chứng minh  $CB'$  song song với mặt phẳng  $(AHC')$ .
- Tìm giao điểm của  $AC'$  với  $(BCH)$ .
- Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua trung điểm  $M$  của  $CC'$  và song song với  $AH$  và  $CB'$ . Xác định thiết diện và tỉ số mà các đỉnh của thiết diện chia cạnh tương ứng của lăng trụ.

**Giải**



- Gọi  $K$  là trung điểm của  $AB$ , ta có:  
 $B'K \parallel AH \Rightarrow B'K \parallel (AHC')$ ,  
 $KC \parallel HC' \Rightarrow KC \parallel (AHC')$   
Mặt phẳng  $(B'KC)$  chứa 2 đường thẳng  $B'K, KC$  cùng song song với  $mp(AHC')$  nên  $(B'KC) \parallel (AHC')$ .  
mà  $CB' \subset (B'KC)$  nên  $CB' \parallel (AHC')$ .
- Mặt phẳng  $(BCH)$  cắt  $(A'B'C')$  theo giao tuyến  $HL \parallel BC$  (vì 2 đáy song song). Nối  $CL$  cắt  $AC'$  tại  $I$ , thì  $I$  là giao điểm của  $AC'$  với mặt phẳng  $(BCH)$ .

**ABC**



- c) Ta có  $(B'KC) \parallel (AHC')$  và  $(\alpha) \parallel AH, (\alpha) \parallel CB' \Rightarrow (\alpha) \parallel (B'KC)$  và  $(AHC')$ . Do đó  $(\alpha)$  cắt  $(BCC'B')$  theo giao tuyến MN song song với  $CB'$ , cắt  $(A'B'C')$  theo giao tuyến NP song song với  $C'H$ , cắt  $(ABB'A)$  theo giao tuyến PQ song song với  $AH$ , cắt  $(ABC)$  theo giao tuyến QR song song với  $CK$ . Vậy thiết diện là ngũ giác MNPQR.  
Ta có M là trung điểm  $CC'$ , theo cách dựng thì ta có N, P, Q, K lần lượt là trung điểm của  $C'B', B'H, AK, AC$  nên M, N, P, Q, R theo thứ tự chia các đoạn  $CC', B'C', A'B', AB, AC$  theo các tỉ số  $1, 1, 3, \frac{1}{3}, 1$ .

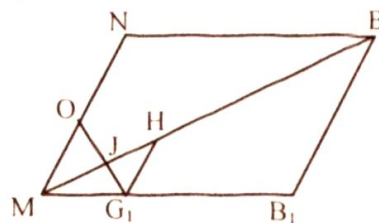
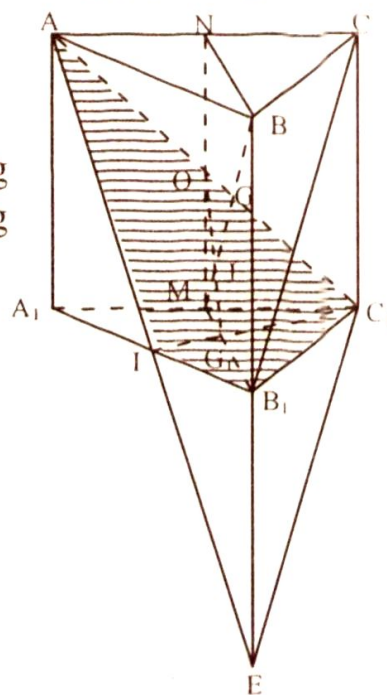
**Ví dụ 8:** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A_1B_1C_1$ .

- Dựng thiết diện của hình lăng trụ với  $mp(\alpha)$  đi qua  $AC_1$  và song song với  $CB_1$
- Gọi  $G_1$  là trọng tâm của tam giác  $A_1B_1C_1$ . Xác định giao tuyến của  $mp(\alpha)$  và  $mp(BB_1G_1)$ .
- Xác định giao điểm J của đường thẳng BM với  $mp(\alpha)$  trong đó M là trung điểm của cạnh  $A_1C_1$ . Tính tỉ số  $\frac{JG_1}{JO}$

**Giải**

- Theo tính chất giao tuyến song song, trong  $mp(BCC_1B_1)$  vẽ qua  $C_1$  đường thẳng song song với  $CB_1$ , cắt  $BB_1$  tại E, thì  $B_1E = CC_1 = BB_1$ .  
Trong  $mp(ABB_1A_1)$   $AE \cap A_1B_1 = I$  thì I là trung điểm của  $A_1B_1$ . Tam giác  $AC_1I$  là thiết diện cần dựng.
- Gọi M, N lần lượt là trung điểm của  $A_1C_1, AC$ . Đường thẳng MN cắt  $AC_1$  tại O.  
Ta có O và  $G_1$  thuộc hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(BB_1G_1)$  nên đường thẳng  $OG_1$  là giao tuyến của chúng;
- Giao điểm J của đường thẳng BM với  $mp(\alpha)$  chính là giao điểm J của BM và  $OG_1$ .

$$\text{Vẽ } G_1H \parallel B_1B \text{ thì } \frac{JG_1}{JO} = \frac{G_1H}{OM} = \frac{\frac{1}{3}BB_1}{\frac{1}{2}MN} = \frac{2}{3}$$



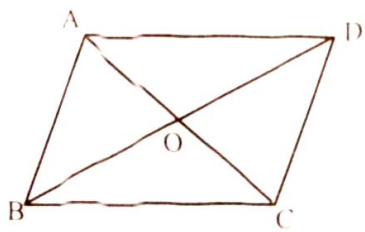
**Ví dụ 9:** Chứng minh rằng tổng bình phương tất cả các đường chéo của một hình hộp bằng tổng bình phương tất cả các cạnh của hình hộp đó.

**Giải**

Ta chứng minh trong một hình bình hành, tổng bình phương hai đường chéo bằng tổng bình phương bốn cạnh.

Tam giác ABD có trung tuyến AO:





$$AB^2 + AD^2 = 2AO^2 + \frac{BD^2}{2} = \frac{AC^2}{2} + \frac{BD^2}{2}$$

Do đó:  $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$

Áp dụng đối với 2 hình bình hành  $ACC'A'$  và  $BDD'B'$

$$AC'^2 + CA'^2 = 2(AC^2 + AA'^2)$$

$$\text{và } BD'^2 + DB'^2 = 2(BD^2 + BB'^2)$$

$$\text{Nên } AC'^2 + CA'^2 + BD'^2 + DB'^2 = 2[(AC^2 + BD^2) + (AA'^2 + BB'^2)]$$

$$= 2[(2(AB^2 + AD^2) + 2AA'^2)] = 4(AB^2 + AD^2 + AA'^2)$$

Vì 12 cạnh hình hộp chia làm 3 nhóm song song và bằng nhau  $\Rightarrow$  đpcm.

**Ví dụ 10:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ .

a) Chứng minh mặt phẳng  $(BDA')$  song song  $(B'D'C)$ .

b) Chứng minh đường chéo  $AC'$  đi qua trọng tâm  $G_1$  và  $G_2$  của hai tam giác  $BDA'$  và  $B'D'C$ , hơn nữa  $G_1$  và  $G_2$  chia đoạn  $AC'$  thành ba phần bằng nhau.

c) Các trung điểm của sáu cạnh  $BC, CD, DD', D'A', A'B', B'B$  cùng nằm trên một mặt phẳng

**Giải**

a) Hai mặt phẳng  $(BDA')$  và  $(B'D'C)$  song song vì ta có  $BD \parallel B'D', BA' \parallel D'C$   
 $\Rightarrow BD, BA' \parallel (B'D'C)$ .

b) Gọi  $O$  và  $O'$  lần lượt là tâm của đáy  $ABCD$  và  $A'B'C'D'$ . Đường chéo  $AC'$  nằm trong mặt phẳng  $(AA'C'C)$ ,  $AC'$  cắt  $A'O$  tại  $G_1$ . Xét tam giác  $BDA'$  thì  $A'O$  là một trung tuyến và  $AO \parallel A'C'$  nên  $\frac{G_1O}{G_1A'} = \frac{AO}{A'C'} = \frac{1}{2}$ , do đó  $G_1$  là

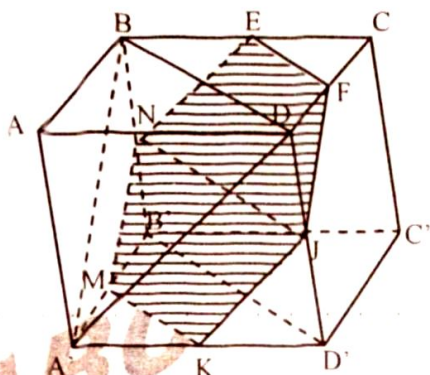
trọng tâm của tam giác  $BDA'$ .

Tương tự thì  $G_2$  là trọng tâm của tam giác  $B'D'C$

Ta có  $A'O \parallel O'C$  và  $O$  trung điểm  $AC$ ,  $O'$  trung điểm  $A'C'$  nên  $G_1$  là trung điểm của  $AG_2$  và  $G_2$  là trung điểm của  $C'G_1$ .

Vậy  $AG_1 = G_1G_2 = G_2C'$ .

c) Gọi  $E, F, J, K, M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CD, DD', D'A', A'B', B'B$ .



Ta có  $EF \parallel JN, JN \parallel KM$  và  $EF \parallel BD, FJ \parallel BA', KM \parallel BD, MN \parallel BA'$ . Do đó hai mặt phẳng  $(EFJN)$  và  $(JKMN)$  đều song song với  $mp(A'BD)$ .

Nhưng hai mặt phẳng  $(EFJN), (JKMN)$  có chung điểm  $J$  nên chúng phải trùng nhau.

Vậy sáu điểm  $E, F, J, K, M, N$  cùng nằm trên một mặt phẳng.



**Ví dụ 11:** Cho hình hộp thoi  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trên  $AB, DD', C'B'$  lấy ba điểm  $M, N, P$  sao cho  $AM = D'N = B'P$ . Chứng minh rằng  $mp(MNP)$  song song  $mp(AB'D')$ .

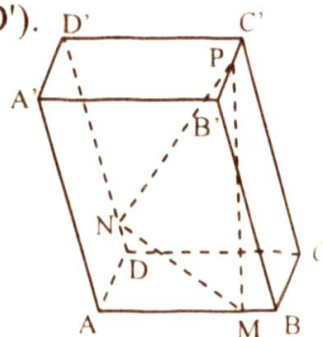
**Giải**

Vì các cạnh của hình hộp bằng nhau và  $AM = D'N = B'P$  nên  $MB = PC' = ND$ .

Ta có:  $\frac{BM}{MA} = \frac{C'P}{PB'} \Rightarrow \frac{MB}{PC'} = \frac{MA}{PB'} = \frac{AB}{C'B'}$

Theo định lí Ta lét đảo, các đường thẳng  $BC', MP, AB'$  cùng song song với một mặt phẳng hay  $MP \parallel mp(AB'D')$ . Tương tự thì được  $MN \parallel mp(AB'D')$ .

Vậy  $mp(MNP) \parallel mp(AB'D')$

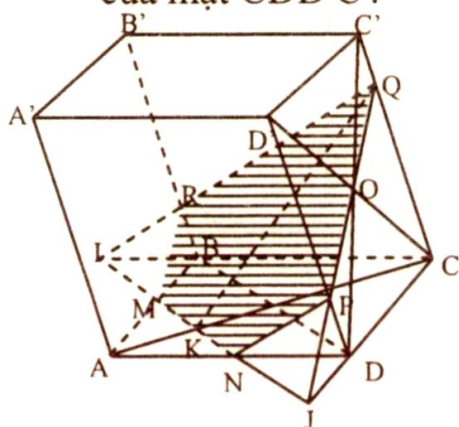


**Ví dụ 12:** Chứng minh rằng nếu thiết diện của hình hộp là một lục giác, thì các cạnh đối của lục giác đó phải song song với nhau.

**Giải**

Hình hộp có 6 mặt, trong đó hai mặt đối diện song song với nhau. Nếu thiết diện là lục giác thì phải có 6 cạnh nằm trên 6 mặt của hình hộp. Suy ra lục giác đó có các cạnh đối song song là các giao tuyến của các mặt đối song song.

**Ví dụ 13:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Vẽ thiết diện của hình hộp tạo bởi mặt phẳng đi qua hai trung điểm  $M, N$  của các cạnh  $AB, AD$  và tâm  $O$  của mặt  $CDD'C'$ .



**Giải**

Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là các giao điểm của đường thẳng  $MN$  với  $BC$  và  $CD$ . Gọi  $P, Q$  lần lượt là các giao điểm của đường thẳng  $JO$  với các cạnh  $DD', CC'$ . Gọi  $R$  là giao của  $BB'$  và đường thẳng  $IQ$ . Vậy thiết diện là ngũ giác  $MNPQR$ .

Cách khác: Phối hợp với giao tuyến song song:

$$PR \parallel MN, BD.$$

**Ví dụ 14:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Trên ba cạnh  $AB, DD', C'B'$  lần lượt lấy ba điểm  $M, N, P$  không trùng với các đỉnh sao cho  $\frac{AM}{AB} = \frac{D'N}{D'D} = \frac{B'P}{B'C'}$ .

- Chứng minh rằng  $mp(MNP)$  và  $mp(AB'D')$  song song với nhau.
- Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi  $mp(MNP)$ .

**Giải**

a) Ta có:  $\frac{AM}{AB} = \frac{D'N}{DD'} = \frac{B'P}{B'C'}$



$$\Rightarrow \frac{AM}{P'N} = \frac{MB}{ND} = \frac{BA}{DD'}$$

$$\text{và } \frac{AM}{B'P} = \frac{MB}{PC'} = \frac{BA}{C'B'}$$

Theo định lí Ta-lét đảo, thì MN song song với mp( $\alpha$ ); với mp( $\alpha$ ) song song với AD', BD và MP song song với mp( $\beta$ ); với mp( $\beta$ ) song song với AB', BC.

Vì  $BD \parallel B'D'$ ,  $BC' \parallel AD'$  nên hai mp( $\alpha$ ) và mp( $\beta$ ) đều song song với mp(AB'D) do đó MN và MP đều song song với mp(AB'D'). Vậy mp(MNP)  $\parallel$  mp(AB'D').

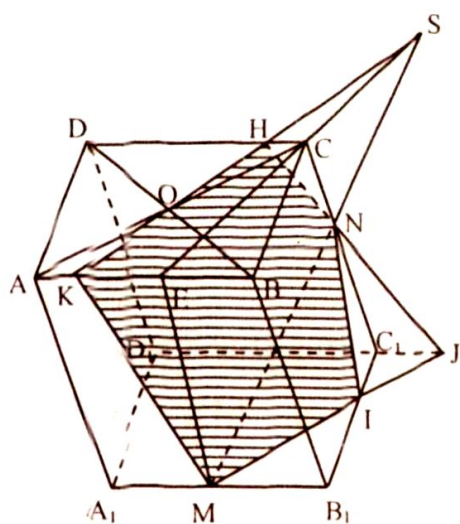
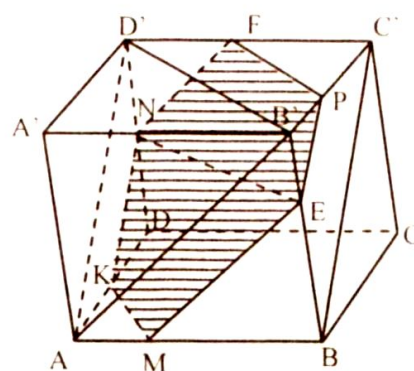
- b) Từ M vẽ ME song song với AB', từ P vẽ PF song song với B'D'. Từ N vẽ NK song song với AD' cắt AD tại K. Thiết diện là lục giác MEPFNK có các cạnh đôi song song.

**Ví dụ 15:** Cho hình hộp ABCD.A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>. Gọi M, N và O lần lượt là trung điểm của các cạnh A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>, CC<sub>1</sub> và tâm của đáy ABCD

a) Xác định giao điểm S của đường thẳng MN và mp(ABCD);

b) Dựng thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mp(MNO);

c) Gọi I là giao điểm của B<sub>1</sub>C<sub>1</sub> và mp(MNO). Tính tỉ số  $\frac{IB_1}{IC_1}$



### Giải

- a) Gọi E là trung điểm của AB, thì ME  $\parallel$  CN. Trong mp(MNCE):  $S = MN \cap CE$  do đó S cũng là giao của MN với mp(ABCD).  
b) SO cắt CD tại H và AB tại K. HN cắt C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> tại J, JM cắt B<sub>1</sub>C<sub>1</sub> tại I. Ngũ giác HKMIN là thiết diện cần dựng.

c)  $NC \parallel ME, NC = \frac{1}{2}ME \Rightarrow AK = CH = \frac{1}{2}KE$

$$\Rightarrow CH = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{6}AB = C_1J.$$

$$\text{Vậy } \frac{IB_1}{IC_1} = \frac{MB_1}{C_1J} = \frac{1}{3}.$$



### DẠNG 3: YẾU TỐ CỐ ĐỊNH - TẬP HỢP ĐIỂM

• **Yếu tố cố định:**

- Đường thẳng hoặc mặt phẳng đi qua điểm cố định: điểm cố định là giao điểm của 2 đường thẳng cố định hoặc giao điểm của một đường thẳng cố định với một mặt phẳng cố định khác.

- Mặt phẳng song song một đường thẳng cố định: mặt phẳng chứa một giao tuyến song song với một đường thẳng; dùng định lý Ta-lét đảo, đưa về các mặt phẳng song song.

• **Tập hợp điểm:**

- Xác định mặt phẳng cố định chứa điểm đó.

- Chứng minh điểm thuộc mặt phẳng hoặc một miền, một đường của mặt phẳng.

- Giới hạn quỹ tích và làm phần đảo.

**Ví dụ 1:** Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là hai điểm di động trên các cạnh AD và BC sao cho  $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC}$ . Chứng minh rằng IJ luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

**Giải**

Qua I vẽ đường thẳng song song với CD, cắt AC tại H, ta có:

$$\frac{HA}{HC} = \frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC} \Rightarrow HJ \parallel AB; HI \parallel CD.$$

Do đó AB và CD song song (IJH)

Gọi (P) là mặt phẳng qua AB và song song với CD thì (IJH) // (P) cố định.

Mà  $IJ \subset (IJH) \Rightarrow IJ \parallel (P)$  cố định.

Cách khác: Dùng định lý Ta-lét đảo.

**Ví dụ 2:** Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M và N là hai điểm di động tương ứng trên AD và BE sao cho:  $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NE}$ . Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

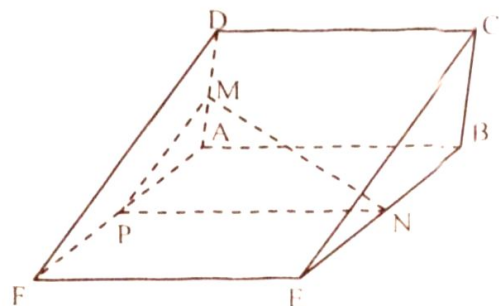
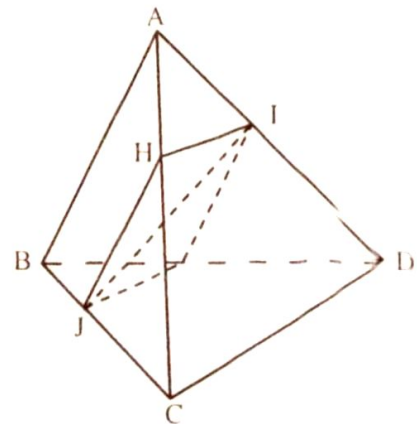
**Giải**

Trong mặt phẳng (ADF) qua M vẽ đường thẳng MP song song với DF, cắt AD tại M.

$$\text{Ta có } \frac{AP}{PF} = \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NE}$$

nên  $PN \parallel FE$ . Do đó (MNP) // (DEF).

Vì  $MN \subset (MNP)$  nên MN song song với mặt phẳng (DEF) cố định.





**Ví dụ 3:** Cho hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Tìm tập hợp những điểm I chia đoạn thẳng MN theo một tỉ số k cho trước,  $k \neq 0$ .

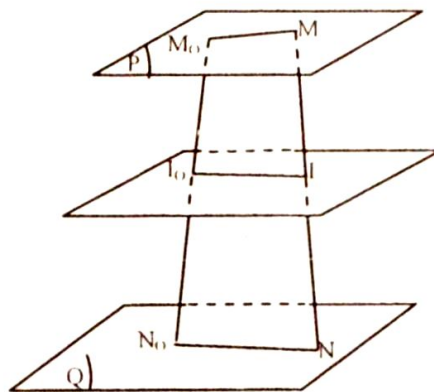
### Giai

Lấy trên (P) và (Q) lần lượt hai điểm  $M_0, N_0$  cố định. Gọi  $I_0$  chia đoạn thẳng  $M_0N_0$  theo tỉ số k thì  $I_0$  cố định.

$$\text{Ta có } \frac{IM}{IN} = \frac{I_0M_0}{I_0N_0} = k$$

$$\Rightarrow \frac{IM}{I_0M_0} = \frac{IN}{I_0N_0} = \frac{IM + IN}{I_0M_0 + I_0N_0} = \frac{MN}{M_0N_0}$$

Theo định lí Ta-lét đảo thì  $M_0M, I_0I, N_0N$  nằm trên ba mặt phẳng song song. Suy ra điểm I nằm trên mp(R) đi qua  $I_0$  và song song với (P) và (Q) cố định.



Đảo lại, lấy điểm  $I \in mp(R)$  và vẽ qua I một đường thẳng nào đó cắt (P) và (Q) lần lượt tại M và N thì theo định lí Ta-lét thuận  $\frac{IM}{IN} = \frac{I_0M_0}{I_0N_0} = k$ . Vậy

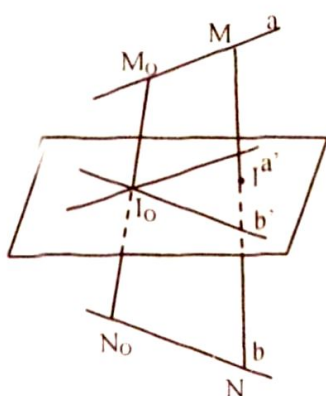
quỹ tích của điểm I là mặt phẳng (R).

**Ví dụ 4:** Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b. Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên a và b. Tìm tập hợp những điểm I chia đoạn thẳng MN theo một tỉ số k cho trước,  $k \neq 0$ .

### Giai

Lấy hai điểm cố định  $M_0, N_0$  lần lượt nằm trên a, b và điểm  $I_0$  chia  $M_0N_0$  theo tỉ số k cho trước thì  $I_0$  cố định.

$$\text{Ta có } \frac{IM}{IN} = k = \frac{I_0M_0}{I_0N_0} \Rightarrow \frac{IM}{I_0M_0} = \frac{IN}{I_0N_0} = \frac{MN}{M_0N_0}$$



Áp dụng định lí Ta-lét đảo thì ba đoạn thẳng  $I_0I, M_0M, N_0N$  nằm trên ba mặt phẳng song song. Do đó I nằm trên mp(R) đi qua  $I_0$  và song song với a và b, mặt phẳng này được xác định bởi 2 đường thẳng qua  $M_0$  là  $a' \parallel a, b' \parallel b$ .

Đảo lại, lấy điểm  $I \in mp(R)$ , hai mp(I; a) và (I; b) cắt nhau theo giao tuyến, giao tuyến này cắt a và b tại M, N.

$$\text{Theo định lí Ta-lét thì: } \frac{IM}{IN} = \frac{I_0M_0}{I_0N_0} = k.$$

Vậy quỹ tích các điểm I là mặt phẳng (R).



**Ví dụ 5:** Cho điểm A cố định nằm ngoài mặt phẳng (P). Điểm M lưu động trên (P). Tìm tập hợp các trung điểm I của AM.

**Giải**

Lấy điểm B cố định trên (P)

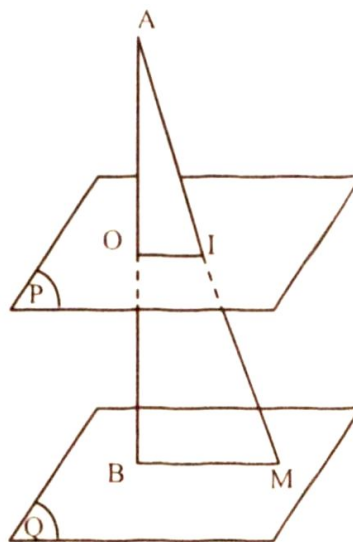
Gọi O là trung điểm của AB thì O cố định.

Ta có  $OI \parallel BM \Rightarrow OI \parallel (P)$  do đó I nằm trên mặt phẳng (Q) cố định, đi qua O và song song (P).

Đảo lại, với I bất kỳ trên (Q), AI cắt (P) tại M. Vì  $(P) \parallel (Q)$  nên mp(ABM) cắt 2 mặt phẳng (P) và (Q) theo 2 giao điểm  $OI \parallel BM$

$$\Rightarrow \frac{IA}{IM} = \frac{OA}{OB} = 1 \Rightarrow I \text{ trung điểm } AM.$$

Vậy quỹ tích các điểm I là mặt phẳng (Q).



**Ví dụ 6:** Cho hai tia Ax và By nằm trên hai đường thẳng chéo nhau. Một điểm M chạy trên Ax và một điểm N chạy trên By sao cho  $AM = kBN$  ( $k > 0$  cho trước).

a) Chứng minh rằng MN song song với một mặt phẳng cố định.

b) Tìm tập hợp các điểm I thuộc đoạn MN sao cho  $IM = kIN$ .

**Giải**

a) Vẽ tia Bz song song và cùng hướng với tia Ax. Trên các tia Ax, By và Bz lần lượt lấy các điểm cố định  $M_0$ ,  $N_0$  và  $M'_0$  sao cho  $\frac{AM_0}{BN_0} = k$

và  $BM'_0 = AM_0$ .

Lấy điểm M' thuộc tia Bz sao cho  $BM' = AM$  thì  $MM' \parallel M_0M'_0$  và  $NM' \parallel N_0M'_0$ .

Do đó  $(MNM') \parallel mp(M_0N_0M'_0)$ .

Vậy MN luôn song song với mặt phẳng cố định  $(M_0N_0M'_0)$ .

Cách khác: Dùng định lý Ta-lét đảo.

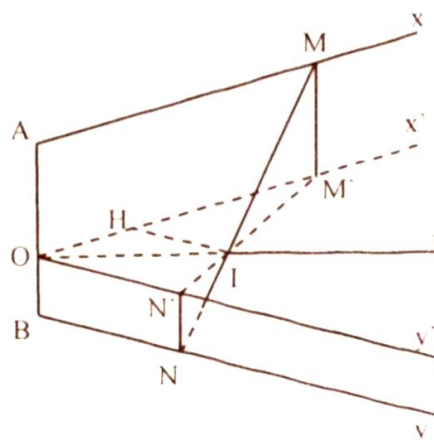
b) Gọi O là một điểm thuộc đoạn thẳng AB

sao cho  $\frac{OA}{OB} = k$  nên O cố định. Từ O ta

vẽ hai tia  $Ox'$  và  $Oy'$  sao cho  $Ox' \parallel Ax$ ,  $Oy' \parallel By$ . Vẽ  $MM' \parallel AB$ ,  $M' \in Ox'$  và  $NN' \parallel AB$ ,  $N' \in Oy'$ .

$$\text{Ta có } \frac{IM}{IN} = \frac{M'M}{N'N} = \frac{OA}{OB} = k$$

$$\Rightarrow MN \cap M'N' = I$$





Trong tam giác  $M'ON$ :  $\frac{IM'}{IN'} = k = \frac{OM'}{ON'}$ , do đó  $I$  nằm trên tia phân giác

$Ot$  của góc  $x'Oy'$ .

Đảo lại, lấy  $I$  là một điểm bất kì thuộc tia phân giác  $Ot$  của góc  $x'Oy'$ .

Vẽ  $IH \parallel Oy'$ ,  $H \in Ox'$ . Lấy  $M' \in Hx'$  sao cho  $HM' = kHO$ .

$M'I$  cắt  $Oy'$  tại  $N'$  thì  $IM' = kIN'$ .

Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là những điểm thuộc các tia  $Ax$ ,  $By$  sao cho  $AM = OM'$ ;  $BN = ON'$ . Ta có  $I, M, N$  thẳng hàng và  $\frac{IM}{IN} = k$ . Vậy tập

hợp các điểm  $I$  là tia phân giác  $Ot$  của góc  $x'Oy'$ .

**Ví dụ 7:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Hai điểm  $M, N$  lần lượt thay đổi trên hai cạnh  $AB$  và  $CD$ . Tìm tập hợp các trung điểm của  $MN$ .

**Giải**

Gọi  $I$  là trung điểm của  $MN$ . Gọi  $P, Q, R, S$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AD$  và  $DB$ .

Vì  $\frac{PB}{IM} = \frac{PC}{IN} = \frac{BC}{MN}$  nên  $BM, PI,$

$CN$  cùng song song với một mặt phẳng, mặt phẳng này song song với  $AB$  và  $CD$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua  $P$  và song song với mặt phẳng đó thì  $I \in (\alpha)$  cố định.

Mặt phẳng này cắt tứ diện  $ABCD$  theo thiết diện là hình bình hành  $PQRS$ . Vì  $M$  chỉ chạy trên đoạn  $AB$ ,  $N$  chỉ chạy trên đoạn  $CD$  nên điểm  $I$  luôn nằm trong tứ diện, tức là  $I$  luôn nằm trong hình bình hành  $PQRS$ .

Đảo lại, lấy một điểm  $I$  nằm trong hình bình hành  $PQRS$ . Hai mặt phẳng  $(IAB), (ICD)$  cắt nhau theo giao tuyến qua  $I$ , cắt cạnh  $AB, CD$  tại  $M, N$ . Theo định lý Ta-lét thì  $I$  là trung điểm của  $MN$ . Vậy tập hợp các điểm  $I$  là hình bình hành  $PQRS$  cùng với các điểm trong của nó.

**Ví dụ 8:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  là hai điểm di động lần lượt trên các cạnh  $AD, BC$  sao cho  $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{IC}$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  chia đoạn  $IJ$  theo tỉ số  $k$  cho trước.

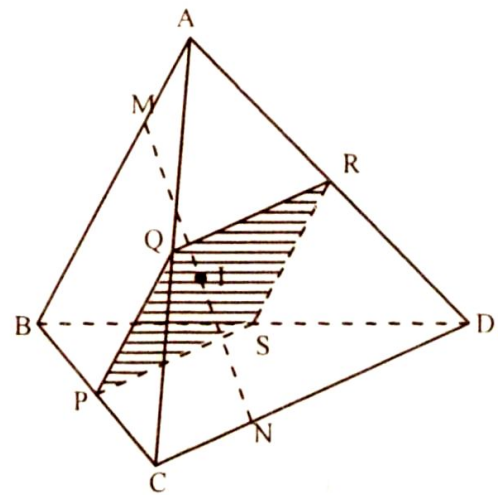
**Giải**

Qua  $I$  vẽ  $IH \parallel CD$ ,  $H \in AC$ , ta có:

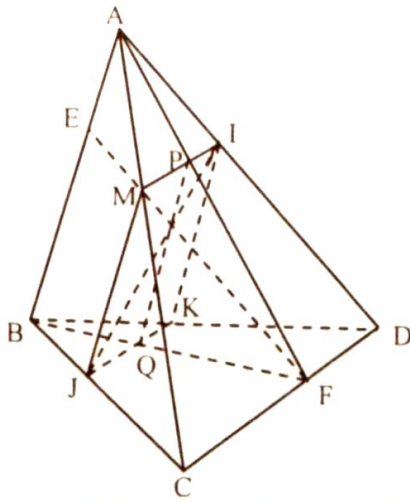
$$\frac{HA}{HC} = \frac{IA}{ID} = \frac{JB}{IC} \Rightarrow HJ \parallel AB.$$

Do đó  $AB, CQ \parallel (IHJ)$ .

Mặt phẳng  $(IHJ)$  cắt  $BD$  tại  $K$  nên tứ giác  $IHKJ$  là hình bình hành. Qua  $M$  vẽ đường thẳng song song với  $AB$ , cắt  $HI$  tại  $P, JK$  tại  $Q$ .







Ta có:  $\frac{IP}{PH} = \frac{RQ}{QJ} = \frac{IM}{MJ} = k$  mà  $HI \parallel JK \parallel CD$ .

Do đó P, Q lần lượt thuộc đoạn AF và BF với F là điểm chia CD theo tỉ số k. Gọi E là điểm chia AB theo tỉ k. Do đó E, F cố định.

Ta có  $PQ \parallel AB$ ,  $\frac{PM}{MQ} = \frac{IM}{MJ} = k \Rightarrow M \in EF$  cố định.

Từ đó suy ra tập hợp những điểm M là đoạn EF.

**Ví dụ 9:** Cho hình chóp S.ABC. Các điểm I, J, K lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCA.

a) Chứng minh rằng  $(IJK) \parallel (ABC)$ .

b) Tìm tập hợp các điểm M nằm trong hình chóp S.ABC sao cho KM song song với mp(ABC).

**Giải**

a) Gọi I', J', K' lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng SI và AB, SJ và BC, SK và CA. Khi đó I', J', K' lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và CA.

Ta có:  $\frac{SI}{SI'} = \frac{SK}{SK'} = \frac{SJ}{SJ'} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow IK \parallel I'K'$ ,  $KJ \parallel K'J'$

$\Rightarrow IK, KJ \parallel mp(I'J'K')$ .

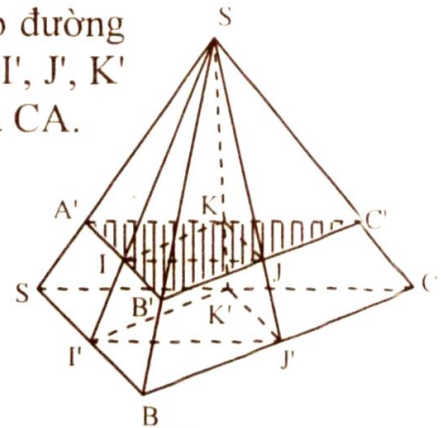
$\Rightarrow mp(IJK) \parallel mp(I'J'K')$ .

Vậy  $(IJK) \parallel (ABC)$ .

b) Ta có  $KM \parallel (ABC)$  khi và chỉ khi KM thuộc mp(P) qua K và song song với mp(ABC). Vậy  $KM \parallel (ABC)$  khi và chỉ khi  $M \in (P)$  cố định.

Gọi A', B', C' lần lượt là các giao điểm của (P) với các cạnh SA, SB, SC. Ta có các giao tuyến  $A'B' \parallel AB$ ,  $B'C' \parallel BC$ ,  $C'A' \parallel CA$ .

Theo giả thiết M chỉ nằm trong hình chóp S.ABC, nên tập hợp các điểm M sao cho  $KM \parallel (ABC)$  là tam giác A'B'C'.



#### DẠNG 4: TỔNG HỢP SONG SONG

• Một mặt phẳng được xác định nếu biết một trong các điều kiện sau đây:

- Mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng không chứa điểm đó.
- Mặt phẳng đi qua hai đường thẳng cắt nhau.
- Mặt phẳng đi qua hai đường thẳng song song.
- Mặt phẳng đi qua một đường thẳng và song song với một đường thẳng chéo với đường thẳng ấy.
- Mặt phẳng đi qua một điểm và song song với một mặt phẳng không chứa điểm ấy.



• Hình chóp cắt có hai đáy nằm trên hai mặt phẳng song song; các mặt bên đều là hình thang; các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.

Chú ý: Sử dụng hình học phẳng, quan hệ song song và các vị trí tương đối của điểm, đường thẳng, mặt phẳng để giải toán.

**Ví dụ 1:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- a) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau;
- b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- c) Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.
- d) Qua một điểm nằm ngoài đường thẳng thì có duy nhất một mặt phẳng song song với đường thẳng đó.

**Giải**

Dựa vào các định nghĩa thì mệnh đề b) đúng và c) đúng.

**Ví dụ 2:** Trong các mệnh đề, mệnh đề nào đúng?

- a) Nếu hai mặt phẳng song song thì mỗi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng kia.
- b) Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì song song với nhau.
- c) Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cắt mặt phẳng còn lại.
- d) Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng thì có duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

**Giải**

Dựa vào các định nghĩa thì mệnh đề c) đúng và d) đúng.

**Ví dụ 3:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- a) Hình hộp là một hình lăng trụ
- b) Hình lăng trụ có tất cả các cạnh song song.
- c) Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên bằng nhau.
- d) Hình hộp có các mặt đối diện bằng nhau,

**Giải**

Dựa vào các định nghĩa thì mệnh đề a) đúng và d) đúng.

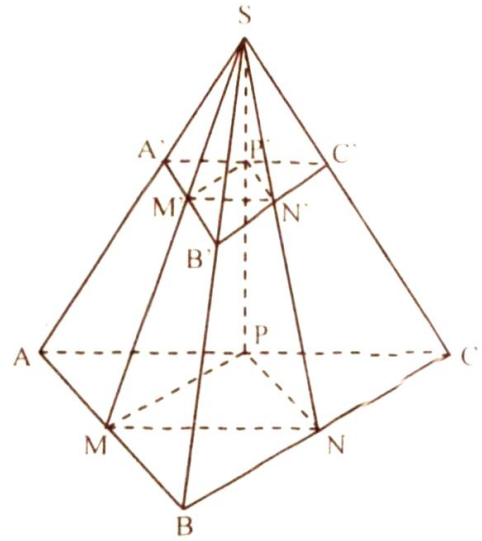


**Ví dụ 4:** Cho hình chóp cụt  $ABC.A'B'C'$  có đáy lớn  $ABC$  và các cạnh bên  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ . Gọi  $M$ ,  $N$ ,  $P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  và  $M'$ ,  $N'$ ,  $P'$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $A'B'$ ,  $B'C'$ ,  $C'A'$ . Chứng minh  $MNP.M'N'P'$  là hình chóp cụt.

**Giải**

Gọi  $S$  là điểm đồng quy của các đường thẳng  $AA'$ ,  $BB'$  và  $CC'$ . Ta có các đường thẳng  $MM'$ ,  $NN'$ ,  $PP'$  cũng đồng quy tại  $S$  và  $M'N' \parallel MN$ ,  $M'P' \parallel MP$  nên  $mp(M'N'P')$  song song với  $mp(MNP)$ .

Vậy  $MNP.M'N'P'$  là hình chóp cụt.

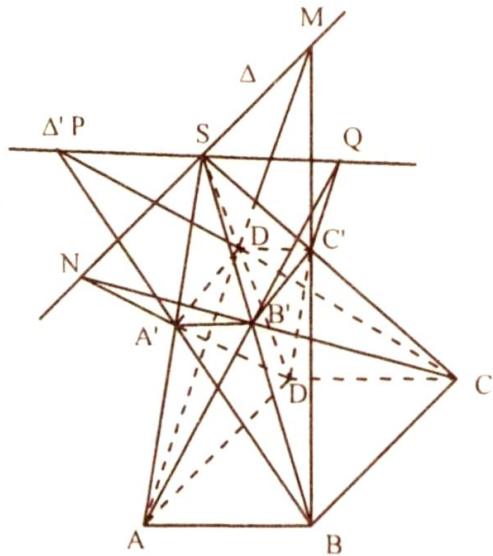


**Ví dụ 5:** Cho hình chóp cụt tứ giác  $ABCD.A'B'C'D'$  có các cạnh bên là  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  và có đáy lớn  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng  $AD'$  và  $BC'$ ,  $CB'$  và  $DA'$ ,  $BA'$  và  $CD'$ ,  $AB'$  và  $DC'$ . Chứng minh bốn điểm  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  đồng phẳng.

**Giải**

Gọi  $S$  là điểm đồng quy của các đường thẳng  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ . Vì  $BC$  song song với  $AD$  nên giao tuyến  $\Delta$  của hai mặt phẳng  $(BB'C'C)$ ,  $(AA'D'D)$  đi qua  $S$  và song song với  $BC$ . Ta có  $M$ ,  $N$  là hai điểm chung của hai mặt phẳng nói trên nên  $M$ ,  $N$  đều thuộc  $\Delta$ .

Lí luận tương tự, hai điểm  $P$ ,  $Q$  thuộc giao tuyến  $\Delta'$  của hai mặt phẳng  $(ABB'A')$  và  $(CDD'C)$  (giao tuyến này đi qua  $S$  và song song với  $AB$ ). Vậy bốn điểm  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  cùng nằm trên  $mp(\Delta, \Delta')$ .



**Ví dụ 6:** Một mặt phẳng song song với mặt đáy của một hình chóp và cắt hình chóp theo một thiết diện. Có nhận xét gì về thiết diện và đa giác đáy.

**Giải**

Thiết diện là một đa giác có các cạnh song song với đa giác đáy và tỉ số các cạnh song song của hai đa giác bằng nhau. Ngoài ra các góc tương ứng của hai đa giác đó bằng nhau. Vậy thiết diện là đa giác đồng dạng với đáy.



**Ví dụ 7:** Cho ba mặt phẳng  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$  đôi một song song với nhau. Hai đường thẳng  $a$  và  $a'$  cắt ba mặt phẳng ấy theo thứ tự nói trên tại  $A, B, C$  và  $A', B', C'$ . Cho  $AB = 3\text{cm}$ ,  $BC = 4\text{cm}$ ,  $A'C' = 14\text{cm}$ . Tính độ dài  $A'B'$ ,  $B'C'$ .

**Giải**

Vì 3 mặt phẳng đôi một song song nên theo định lý Ta-lét:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

$$\text{Do đó: } A'B' = \frac{A'C' \cdot AB}{AC} = \frac{14 \cdot 3}{6} = 6 \text{ cm}$$

$$\text{Suy ra } B'C' = A'C' - A'B' = 8 \text{ (cm).}$$

**Ví dụ 8:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình bình hành tâm  $O$  có  $AC = a$ ,  $BD = b$ . Tam giác  $SBD$  là tam giác đều. Một mặt phẳng  $(\alpha)$  di động song song với mặt phẳng  $(SBD)$  và qua điểm  $I$  trên đoạn  $AC$ .

- Xác định và tính diện tích thiết diện của hình chóp với mặt phẳng  $(\alpha)$ .
- Tìm  $x$  để diện tích thiết diện lớn nhất.

**Giải**

a) Ta xét 3 trường hợp

- Nếu  $I$  trùng  $O$  thì thiết diện là tam giác đều  $SBD$  cạnh  $b$  có  $S_{SBD} = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$

- Nếu  $I$  thuộc đoạn  $OA$ :  $0 < x < \frac{a}{2}$ .

Vì  $(\alpha) \parallel (SBD)$  nên theo tính chất giao tuyến song song thì  $(ABCD)$  cắt theo giao tuyến  $MN$  qua  $I$ , song song với  $BD$ .

Tương tự  $(\alpha)$  cắt  $(SAB)$  theo giao tuyến  $MP$  song song với  $SB$  và cắt  $(SAD)$  theo giao tuyến  $NP$  song song với  $SD$ .

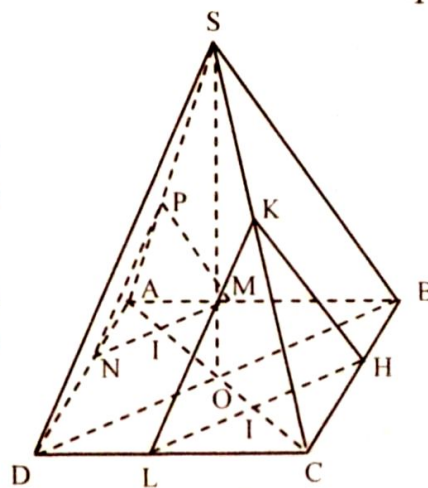
Thiết diện là tam giác đều  $MNP$  đồng dạng với tam giác đều  $SBD$ .

$$\text{Ta có: } \frac{S_{MNP}}{S_{SBD}} = \left( \frac{MN}{BD} \right)^2$$

$$\text{Do } MN \parallel BD \Rightarrow \frac{MN}{BD} = \frac{AI}{AO} = \frac{2x}{a}$$

$$\Rightarrow S_{MNP} = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \left( \frac{2x}{a} \right)^2 = \frac{b^2 x^2 \sqrt{3}}{a^2}$$

- Nếu  $I$  thuộc đoạn  $OC$ :  $\frac{a}{2} < x < a$





Tương tự như trên thì thiết diện là tam giác đều HKL đồng dạng với tam giác đều SBD.

$$\frac{S_{HKL}}{S_{BCD}} = \left( \frac{HL}{BD} \right)^2 = \left( \frac{CI}{CO} \right)^2 = \left( \frac{2(a-x)}{a} \right)^2$$

$$\Rightarrow S_{HKL} = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4(a-x)^2}{a^2} = \frac{b^2(a-x)^2 \sqrt{3}}{a^2}$$

b) So sánh 3 kết quả trên

$$\text{Nếu } 0 < x < \frac{a}{2} \text{ thì } S_{MNP} = \frac{b^2 \cdot x^2 \sqrt{3}}{a^2} < \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Nếu } \frac{a}{2} < x < a \text{ thì } S_{HKL} = \frac{b^2(a-x)^2 \sqrt{3}}{a^2} < \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Nếu } x = \frac{a}{2} \text{ thì } S_{SBD} = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$$

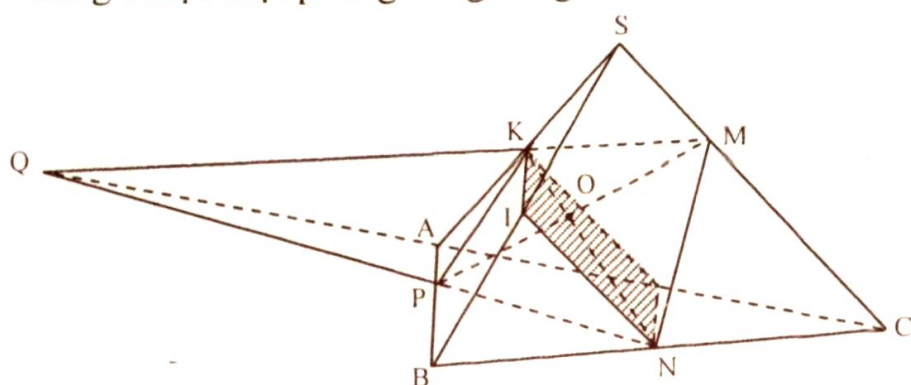
Vậy diện tích thiết diện lớn nhất khi  $x = \frac{a}{2}$ .

**Ví dụ 9:** Cho hình chóp S.ABC. Gọi K và N lần lượt là trung điểm của SA và BC; M là điểm nằm giữa S và C.

- Chứng minh rằng mặt phẳng đi qua K, song song với AB và SC thì đi qua điểm N.
- Xác định thiết diện của hình chóp S.ABC khi cắt bởi mp(KMN). Chứng minh KN chia thiết diện thành hai phần có diện tích bằng nhau.

**Giải**

- Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SB và AC thì các điểm K, I, N, J cùng thuộc mặt phẳng song song với AB và SC.



- Nếu M là trung điểm của SC thì thiết diện là hình bình hành MKPN, trong đó P là trung điểm của AB. Đường chéo KN chia hình bình hành MKPN thành hai phần có diện tích bằng nhau.

  - Nếu M không là trung điểm của SC. Gọi Q là giao điểm của KM và AC, P là giao điểm của QN và AB. Khi đó thiết diện là tứ giác MKIN. Gọi I, J là trung điểm của SB, AC thì IKJN là hình bình hành,  $KI \parallel AB$  và  $IN \parallel SC$  nên  $AB, SC \parallel (IKJN)$ .



Do đó ba mặt phẳng đôi một song song lần lượt chứa KN, AB, SC. Gọi O là giao điểm của MP và KN thì O là giao điểm của MP với (IKJN). Các mặt phẳng song song lần lượt cắt SA tại K, A, S và cắt MP tại O, P, M. Theo định lí Ta-lét  $\frac{OM}{ON} = \frac{KS}{KA} = 1$  nên O là trung điểm của MP.

Vì O là trung điểm của MP nên  $S_{MKN} = S_{PMN} \Rightarrow dpcm$ .

**Ví dụ 10:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Trên AB, CC', CD' và AA' lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho  $AM = C'N = C'P = AQ = x$  ( $0 \leq x \leq a$ ).

- Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q đồng phẳng và MP, NQ cắt nhau tại một điểm cố định.
- Chứng minh mặt phẳng (MNPQ) luôn chứa một đường thẳng cố định. Định x để (MNPQ) // (A'BC').
- Dựng thiết diện của hình lập phương cắt bởi (MNPQ). Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của chu vi thiết diện.

### Giải

- Ta có:  $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{NC'}$  do đó NQ đi qua trung điểm của A'C, tức qua tâm O của hình lập phương.

Trong tứ diện AMPC', do đó MP đi qua trung điểm O của A'C. Vậy MP, NQ cắt nhau tại tâm O của hình lập phương và M, N, P, Q đồng phẳng.

- Ta có:  $AM = AQ = x$  và  $AB = AA' = a \Rightarrow MQ \parallel A'B \Rightarrow A'B \parallel (MNPQ)$

Vậy (MNPQ) chứa đường thẳng cố định qua O và song song với AB. Đường này đi qua trung điểm R và S của BC và A'D'.

$(MNPQ) \parallel (A'BC') \Rightarrow BC' \parallel (MNPQ)$

$$\Rightarrow BC' \parallel RN \Rightarrow \frac{BR}{BC} = \frac{C'N}{CC'} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

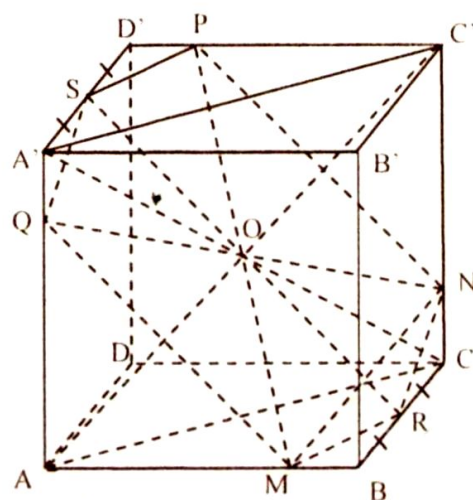
Đảo lại, nếu  $x = \frac{1}{2}$  thì  $MQ \parallel A'B$ ;  $RN \parallel BC'$

$\Rightarrow (MNPQ) \parallel (A'BC')$ . Vậy  $x = \frac{1}{2}$ .

- Thiết diện là lục giác MRNPSQ có tâm đối xứng là O. Suy ra các cặp cạnh MQ và NP, MR và SP, RN và SQ bằng nhau.

$$\text{Ta có: } MR = RN = SP = SQ = \sqrt{\frac{a^2}{4} + (a-x)^2}$$

$$MQ = NP = x\sqrt{2}.$$





Kéo dài B'B một đoạn  $BR_1 = \frac{a}{2}$ ,

kéo dài B'A' một đoạn  $A'S_1 = \frac{a}{2}$  thì:

$$MR = MR_1 = QS = QS_1.$$

Chu vi thiết diện p bằng 2 lần độ dài đường gấp khúc  $S_1QMR_1$ . Độ dài  $S_1QMR_1$  ngắn nhất khi  $S_1, Q, M, R_1$  thẳng hàng.

Chu vi thiết diện ngắn nhất khi  $M \equiv M_1, Q \equiv Q_1$ , với M là giao điểm của  $S_1R_1$  với AB và Q là giao điểm của  $S_1R_1$  với  $AA'$ , tức M, Q là trung điểm của AB,  $AA'$ .

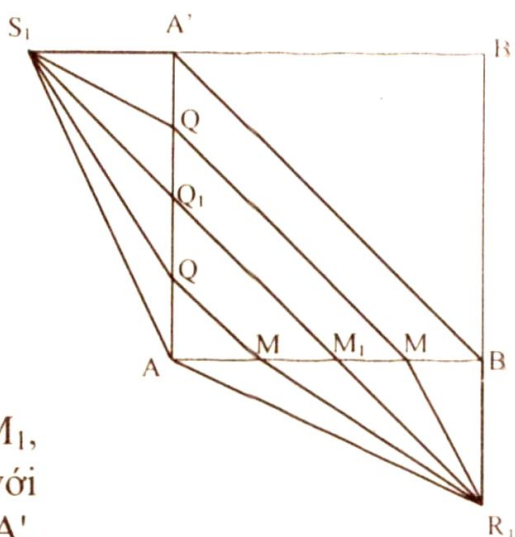
$$\text{Vậy } \min(p) = 6M_1Q_1 = 3a\sqrt{2}.$$

$$\text{Khi } M \in AM_1 \text{ thì } p \leq S_1A + AR_1 = 2\sqrt{AB^2 + BR_1^2} = a\sqrt{5}$$

$$\text{Khi } M \in BM_1 \text{ thì } p \leq S_1A' + A'B + BR_1$$

$$= \frac{a}{2} + a\sqrt{2} + \frac{a}{2} = a(\sqrt{2} + 1)$$

Vì  $a\sqrt{5} < a(\sqrt{2} + 1) \Rightarrow$  Chu vi  $p \leq a(\sqrt{2} + 1)$  với mọi M. Đẳng thức xảy ra khi  $M \equiv B \equiv A'$ . Vậy  $\max(p) = 2a(\sqrt{2} + 1)$ .



### C. BÀI LUYỆN TẬP

1. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SD.

a) Chứng minh mặt phẳng (MNP) song song với (ABCD).

b) Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (MNP).

**HD:** b) dùng tính chất giao tuyến song song

2. Chứng minh hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

3. Trong (P) cho hình bình hành ABCD. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d song song với nhau và không nằm trên (P). Trên a, b, c lần lượt lấy 3 điểm A', B', C' tùy ý.

a) Hãy xác định giao điểm D' của d với mặt phẳng (A'B'C').

b) Chứng minh A'B'C'D' là hình bình hành và  $AA' + CC' = BB' + DD'$ .

c) Khi các điểm A', B', C' thay đổi, tìm quỹ tích giao điểm của A'C' với B'D'.

**ĐS:** c) đường thẳng qua tâm của hình bình hành ABCD và song song với đường thẳng a, b, c, d.



4. Cho điểm O nằm ngoài mặt phẳng (P). Gọi M là một điểm thay đổi trên (P). Tìm quỹ tích các điểm M chia OM theo tỉ lệ k cho trước.
5. Cho 2 điểm M, N thay đổi trên 2 mặt phẳng song song (P) và (Q). Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn MN.  
**ĐS:** mặt phẳng song song với (P) và (Q), đi qua trung điểm của đoạn cố định có 2 mút thuộc (P) và (Q).
6. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Gọi M và N là hai điểm di động lần lượt trên a và b. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn MN.
7. Cho hai nửa đường thẳng Ax và By chéo nhau. Hai điểm M và N lần lượt di động trên Ax và By sao cho  $AM = BN$ .  
 a) Chứng minh MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.  
 b) Tìm tập hợp các trung điểm I của MN.  
**HD:** Gọi O là trung điểm của AB cố định, vẽ  $Ox'$  song song Ax,  $Oy'$  song song với By. Chuyển về mặt phẳng  $x'Oy'$ .
8. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang, đáy lớn  $AB = 3a$ ,  $AD = CD = a$ . Mặt bên (SAB) là tam giác cân đỉnh S với  $SA = 2a$ , (Z) là mặt phẳng di động song song với (SAB), cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q.  
 a) Chứng minh : MNPQ là hình thang cân.  
 b) Gọi I là giao điểm của MQ và NP. Tìm tập hợp những điểm I khi M di động trên AD  
 c) Gọi J là giao điểm của MP và NQ. Chứng minh: IJ có phương không đổi và J di động trong một mặt phẳng cố định.  
**ĐS:** b) giao tuyến của mp(SAD) và mp(SBC).
9. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Vẽ thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua 3 trung điểm của AB, AD và CC'.  
**HD:** mặt phẳng cắt 2 mặt song song theo 2 giao tuyến song song
10. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi I, K lần lượt là tâm các hình bình hành ABCD, BCC'B'. Xác định thiết diện của mặt phẳng (A'IK) với hình hộp đã cho.
11. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Trên 3 cạnh AB, DD', C'B' lần lượt lấy M, N, P sao cho  $\frac{AM}{AB} = \frac{D'N}{D'D} = \frac{B'P}{B'C'}$ .  
 a) Chứng minh (MNP) // (AB'D').  
 b) Xác định thiết diện cắt bởi (MNP).
12. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi E, F, K là trung điểm của AB, DD', B'C'. Xác định thiết diện cắt bởi :  
 a) mp(EFB)  
 b) mp(EFC)  
 c) mp(EFC)  
 d) mp(EFK)



13. Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $M$  và  $M'$  lần lượt là trung điểm của cạnh  $BC$  và  $B'C'$ .
- Chứng minh:  $AM // A'M'$ .
  - Tìm giao điểm của mặt phẳng  $(AB'C')$  với đường thẳng  $A'M$ .
  - Tìm giao tuyến  $d$  của hai mặt phẳng  $(AB'C')$  và  $(BA'C')$ .
  - Tìm giao điểm  $G$  của đường thẳng  $d$  với mặt phẳng  $(AMA')$ . Chứng minh  $G$  là trọng tâm của tam giác  $AB'C'$ .
14. Cho một hình lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$ , đáy là hình thang có  $AD = CD = BC = a$ ,  $AB = 2a$ . Mặt phẳng  $(P)$  qua  $A$  cắt các cạnh  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  lần lượt tại  $M$ ,  $N$ ,  $P$ .
- Tứ giác  $AMNP$  là hình gì? So sánh  $AM$  và  $NP$ .
  - Tìm tập hợp giao điểm của  $AN$  và  $MP$  khi  $(P)$  di động.
  - Chứng minh  $BM + 2DP = 2CN$ .
- HD:** b) tập hợp là giao tuyến của 2 mặt phẳng cố định lần lượt chứa hai đường thẳng  $AN$  và  $MP$
15. Cho một hình lăng trụ tứ giác  $ABCD.A'B'C'D'$ . Chứng minh
- Hai đường chéo  $AC'$  và  $A'C$  cắt nhau, hai đường chéo  $BD'$  và  $B'D$  cắt nhau.
  - Khoảng cách giữa 2 giao điểm của hai cặp đường chéo nói trên bằng độ dài đoạn nối trung điểm của hai đường chéo 2 đáy.
16. Cho hình chóp cụt tam giác  $ABC.A'B'C'$  trong đó  $ABC$  là đáy lớn. Gọi  $S$  là điểm đồng quy của các đường thẳng  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ . Chứng minh:
- $$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC}.$$
- HD:** dùng định nghĩa về hình chóp cụt
17. Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Tứ giác đáy có  $AB$  và  $CD$  cắt nhau tại  $E$ ,  $AD$  và  $BC$  cắt nhau tại  $F$ ,  $AC$  và  $BD$  cắt nhau tại  $G$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng cắt  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  lần lượt tại  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ .
- Hãy tìm giao điểm  $D'$  của cạnh  $SD$  với  $(P)$ .
  - Có bao nhiêu mặt phẳng  $(P)$  để tứ giác  $A'B'C'D'$  là một hình bình hành?
18. Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng thay đổi luôn luôn đi qua các trung điểm  $I$  và  $K$  của các cạnh  $DA$  và  $DB$ . Giả sử  $(P)$  cắt các cạnh  $CA$ ,  $CB$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ .
- Tứ giác  $MNKI$  có tính chất gì? Với vị trí nào của  $(P)$  tứ giác đó là hình bình hành.



- b) Chứng minh giao điểm O của MI và NK thuộc một đường thẳng cố định.  
 c) Gọi d là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (OAB). Chứng minh d luôn luôn nằm trong một mặt phẳng cố định.

**HD:** b) dùng giao tuyến song song

19. Cho tứ diện ABCD có  $AB=AC=CD=a$  và AB vuông góc với CD. Lấy một điểm M trên cạnh AC với  $AM=x$  ( $0 < x < a$ ). Mặt phẳng (W) đi qua M song song với AB và CD cắt BC, BD, AD tại N, P, Q.

- a) Chứng minh: MNPQ là một hình chữ nhật.  
 b) Tính diện tích hình chữ nhật này theo a và x.  
 c) Xác định x để diện tích của hình chữ nhật MNPQ là lớn nhất.

**ĐS:** b)  $S = x(a - x)$

20. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng chéo nhau a, b cắt (P) tại A và B. Gọi m là đường thẳng thay đổi luôn luôn song song với (P) và cắt a tại M, cắt b tại N. Qua điểm N vẽ đường thẳng c song song với a cắt (P) tại điểm C.

- a) Tứ giác MNCA là hình gì?  
 b) Chứng minh điểm C luôn luôn chạy trên một đường thẳng cố định.  
 c) Xác định vị trí của đường thẳng m để độ dài MN nhỏ nhất.

21. Cho hai hình vuông ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng cắt nhau. Trên các đường chéo AC và BF ta lấy các điểm M, N sao cho  $AM=BN$ . Mặt phẳng (P) chứa MN và song song với AB cắt AD và AF lần lượt tại M' và N'.

- a) Tứ giác MNN'M' là hình gì?  
 b) Chứng minh: M'N' song song với EC.  
 c) Chứng minh: MN song song với mặt phẳng (DEF).  
 d) Tính đoạn AM để DM, AB và EN đồng quy theo  $a = AB$ .

**ĐS:** d)  $AM = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

22. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và CC'. Một điểm M nằm trên cạnh bên DD'.

- a) Xác định giao điểm Q của đoạn thẳng BB' và mp(MNP).  
 b) Mặt phẳng (MNP) cắt hình hộp theo một thiết diện gì?  
 c) Tìm giao tuyến của (MNP) với (ABCD).

23. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA' và AC.

- a) Dựng thiết diện của hình lăng trụ với mặt phẳng (MNB').  
 b) Gọi P là trung điểm của cạnh B'C'. Dựng thiết diện của hình lăng trụ với mặt phẳng (MNP).



24. Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  đáy tam giác đều cạnh  $a$ . Gọi  $M, N, P$  là 3 điểm lần lượt nằm trên ba đoạn  $AB', AC', B'C$  sao cho

$$\frac{AM}{AB'} = \frac{C'N}{AC'} = \frac{CP}{CB'} = x.$$

a) Định  $x$  để  $(MNP) \parallel (A'BC')$ . Khi đó hãy tính diện tích của thiết diện cắt bởi mặt phẳng  $(MNP)$ .

b) Tìm tập hợp trung điểm của  $NP$  khi  $x$  thay đổi.

**ĐS:** a)  $x = \frac{1}{3}, S = \frac{2a^2\sqrt{3}}{9}$

25. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Hai điểm lưu động  $M$  trên  $BD$  và  $N$  trên  $A'C'$ . Tìm tập hợp trung điểm của :

a) đoạn  $MA'$

b) đoạn  $MN$

**HD:** a) đường trung bình

b) hình vuông

26. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Trên  $AB, CC', C'D'$  và  $AA'$  lần lượt lấy các điểm  $M, N, P, Q$  sao cho  $AM = C'N = C'P = AQ = x$  ( $0 \leq x \leq a$ )

a) Chứng minh 4 điểm  $M, N, P, Q$  đồng phẳng và  $MP, NQ$  cắt nhau tại một điểm cố định.

b) Chứng minh mặt phẳng  $(MNPQ)$  luôn chứa một đường thẳng cố định.

c) Định  $x$  để mặt phẳng  $(MNPQ) \parallel mp(A'BC')$ .

d) Dựng thiết diện cắt bởi  $(MNPQ)$ . Thiết diện có đặc điểm gì về cạnh? Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của chu vi thiết diện.

**ĐS:** c)  $x = \frac{1}{2}$

27. Cho tứ diện  $ABCD$ , gọi  $G_1, G_2, G_3$  lần lượt là trọng tâm tam giác  $ABC, ACD, ADB$ .

a) Chứng minh: mặt phẳng  $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$ .

b) Tìm thiết diện cắt bởi mặt phẳng  $(G_1G_2G_3)$ . Tính diện tích thiết diện biết diện tích tam giác  $BCD$  là  $s$ .

c)  $M$  là điểm di động bên trong tứ diện sao cho  $G_1M$  luôn song song với mặt phẳng  $(ACD)$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$ .

28. Từ điểm  $O$  bất kỳ trong tứ diện, vẽ 6 đường thẳng song song với 6 cạnh tứ diện có độ dài lần lượt là  $a, b, c, d, e, f$ . Sáu đường thẳng này bị các cặp mặt tương ứng chắn thành các đoạn dài  $a', b', c', d', e', f'$ .

Chứng minh:  $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} + \frac{d'}{d} + \frac{e'}{e} + \frac{f'}{f} = 3$ .

**HD:** ghép các cặp tương ứng và chứng minh  $\frac{a'}{a} + \frac{c'}{c} = 1$ .



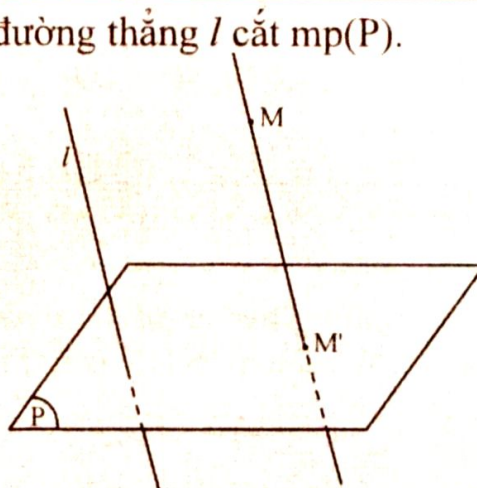
## §4. PHÉP CHIẾU SONG SONG

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Trong không gian cho mặt phẳng (P) và đường thẳng  $l$  cắt mp(P).

Với mỗi điểm M trong không gian, vẽ đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với  $l$ . Đường thẳng này cắt mp(P) tại một điểm M'.

Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' của mặt phẳng (P) như trên gọi là phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương  $l$ .



- Mặt phẳng (P) gọi là mặt phẳng chiếu, đường thẳng  $l$  gọi là phương chiếu; điểm M' gọi là hình chiếu song song hoặc ảnh của điểm M qua phép chiếu song song.

- Cho hình (H). Tập hợp (H') gồm hình chiếu song song của tất cả các điểm thuộc (H) gọi là hình chiếu song song hoặc ảnh của hình (H) qua phép chiếu nói trên.

- Tính chất của các đường thẳng không song song hoặc trùng phương chiếu:

- Hình chiếu song song của một đường thẳng là một đường thẳng, của một tia là một tia.

- Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

- Hình biểu diễn của một hình (H) trong không gian là hình chiếu song song của hình (H) trên một mặt phẳng hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

- Nếu trên hình (H) có hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau thì chúng được biểu diễn bởi hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau, mà tỉ số của hai đoạn thẳng này còn phải bằng tỉ số của hai đoạn thẳng tương ứng trên hình (H).

- Hình chiếu song song của một đường tròn là một đường elip hoặc một đường tròn, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng.



## B. CÁC VÍ DỤ

**Ví dụ 1:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- a) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.
- b) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau thì cắt nhau
- c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau;
- d) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể cắt nhau, trùng nhau, song song với nhau.

**Giải**

Theo các định nghĩa thì mệnh đề c) đúng.

**Ví dụ 2:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- a) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau.
- b) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể cắt nhau;
- c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể trùng nhau;
- d) Một đường thẳng luôn cắt hình chiếu song song của nó.

**Giải**

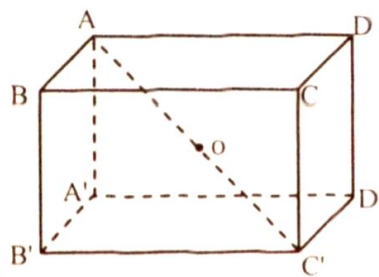
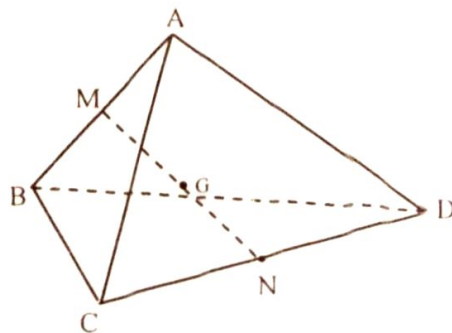
Dựa vào các định nghĩa thì mệnh đề b) đúng và c) đúng.

**Ví dụ 3:** Vẽ hình biểu diễn của:

- a) Một tứ diện và trọng tâm của nó.
- b) Một hình hộp và tâm của nó.

**Giải**

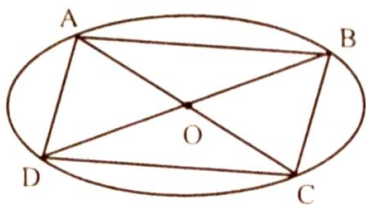
- a) Vẽ hình biểu diễn của một tứ diện ABCD. Lấy M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD thì trung điểm G của MN sẽ biểu diễn cho trọng tâm của tứ diện.
- b) Vẽ hình biểu diễn của một hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Tâm của hình hộp là trung điểm O của đường chéo AC'.



**Ví dụ 4:** Vẽ hình biểu diễn của:

- a) Một tam giác vuông nội tiếp đường tròn.
- b) Một hình chữ nhật nội tiếp đường tròn.

**Giải**



- a) Vẽ elip tâm O là hình biểu diễn của đường tròn đã cho. Lấy B và C là hai điểm trên elip sao cho B, O, C thẳng hàng và một điểm A thuộc elip sao cho A khác B và C.

Khi đó, tam giác ABC là hình biểu diễn của một tam giác vuông nội tiếp trong một đường tròn.



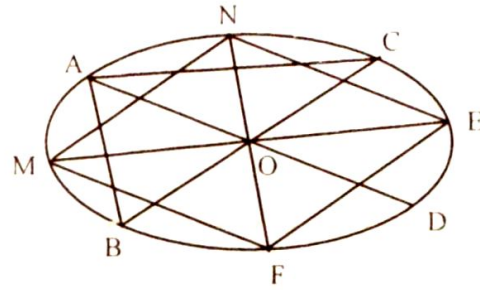
- b) Hình chữ nhật ABCD có 2 đường chéo là 2 đường kính đồng quy tại tâm O của đường tròn.

**Ví dụ 5:** Vẽ hình biểu diễn của:

- a) Một hình vuông nội tiếp trong một đường tròn.  
b) Một lục giác đều.

**Giải**

- a) Hình vuông MNEF nội tiếp (O) khi có 2 đường chéo là 2 đường kính vuông góc nhau, do đó ME và NF song song với 2 cạnh của tam giác vuông nội tiếp (O).

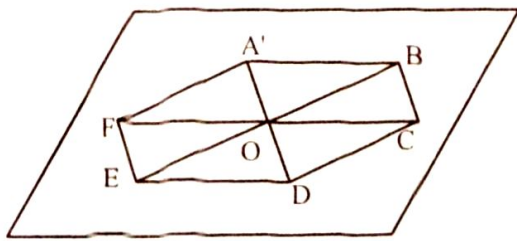


Trước hết, vẽ tam giác ABC là hình biểu diễn của một tam giác vuông tại nội tiếp trong một đường tròn. Qua O ta kẻ hai dây ME và NF của elip lần lượt song song với AC và AB.

Khi đó tứ giác MNEF là hình biểu diễn của một hình vuông nội tiếp trong một đường tròn.

- b) Lục giác đều ABCDEF có tứ giác OABC là hình thoi và các điểm D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng của các điểm A, B, C qua tâm O.

**Giải**



Trước hết, vẽ hình bình hành biểu diễn cho hình thoi OABC. Lấy các điểm D, E, F lần lượt đối xứng với các điểm A', B', C' qua O thì được hình biểu diễn của hình lục giác đều ABCDEF.

Cách khác: ABDE là hình chữ nhật và OC cắt BD tại trung điểm của mỗi đường.

**Ví dụ 6:** Hình thang có thể là hình biểu diễn của hình bình hành không?

**Giải**

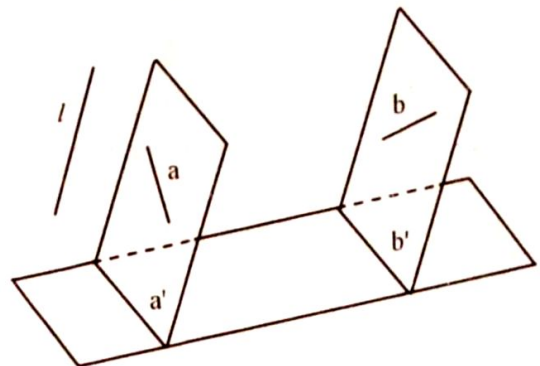
Hình thang không thể là hình biểu diễn của hình bình hành vì hai cạnh bên của hình thang không song song trong khi đó cặp cạnh đối của hình bình hành thì song song.

**Ví dụ 7:** Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau hay không?

**Giải**

Cho a và b là hai đường thẳng chéo nhau có hình chiếu là a' và b'. Nếu mặt phẳng (a, a') và mặt phẳng (b, b') song song với nhau thì chọn phương chiếu l song song với 2 mặt phẳng đó và mặt phẳng chiếu cắt 2 mặt song song theo 2 giao tuyến a' // b'.

Vậy hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song.



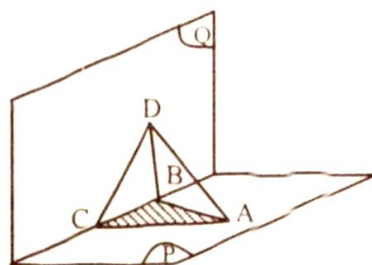


**Ví dụ 8:** Trong mặt phẳng (P) cho một tam giác ABC bất kì. Chứng minh rằng có thể xem tam giác ABC là hình chiếu song song của một tam giác đều nào đó.

**Giải**

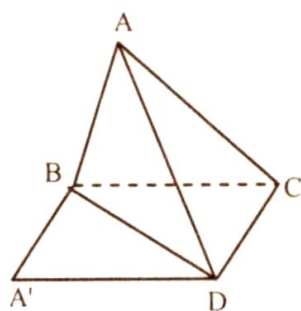
Gọi (Q) là mặt phẳng qua BC và khác với (P). Trong (Q) ta vẽ tam giác đều BCD. Vậy ta có thể xem tam giác

ABC cho trước là hình chiếu song song của tam giác đều BCD theo phương chiếu DA lên mặt phẳng (P).



**Ví dụ 9:** Chứng minh có thể chọn phương chiếu thích hợp để hình chiếu của một hình tứ diện là một hình bình hành, một hình tam giác.

**Giải**



Vẽ hình tứ diện ABCD. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua B, C, D lấy điểm A' trên (P) sao cho A'BCD là hình bình hành. Chiếu tứ diện ABCD lên mp(P) theo phương chiếu AA' ta được hình chiếu là hình bình hành A'BCD.

Chiếu tứ diện đó lên mp(P) theo phương chiếu AB ta được hình chiếu là tam giác BCD.

**Ví dụ 10:** Tam giác ABC có hình chiếu song song là tam giác A'B'C'. Chứng minh rằng trọng tâm tam giác ABC có hình chiếu song song là trọng tâm tam giác A'B'C'.

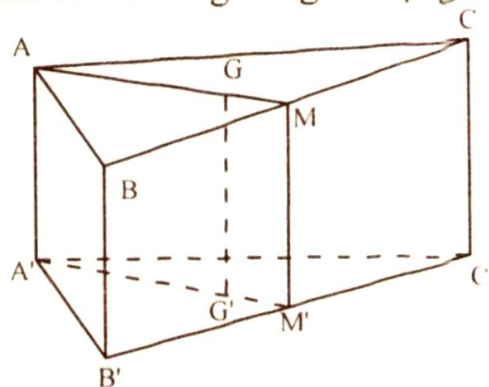
**Giải**

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và G' là hình chiếu song song của nó. Gọi M là trung điểm của BC thì A, G, M thẳng hàng. Gọi M' là hình chiếu của M. Khi đó, theo tính chất của phép chiếu song song ta có:

$$B', M', C' \text{ thẳng hàng và } \frac{B'M'}{M'C'} = \frac{BM}{MC} = 1 \text{ nên } M' \text{ là trung điểm của } B'C'.$$

$$A', G', M' \text{ thẳng hàng và } \frac{A'G'}{A'M'} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$$

Vậy G' là trọng tâm tam giác A'B'C'.



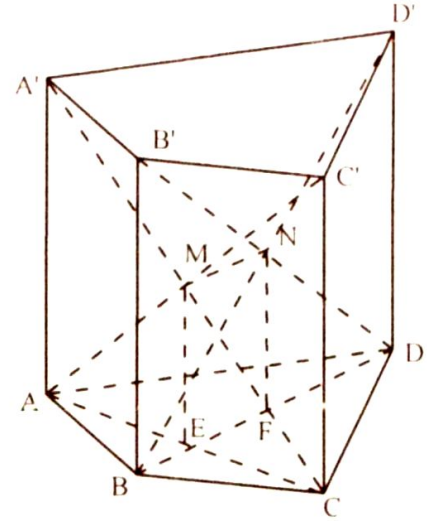
**Ví dụ 11:** Cho hình lăng trụ tứ giác ABCD.A'B'C'D'.

- Chứng minh rằng hai đường chéo AC' và A'C cắt nhau, hai đường chéo BD' và B'D cắt nhau tại trung điểm M, N mỗi đường.
- Gọi E và F lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh  $MN = EF$ .



### Giải

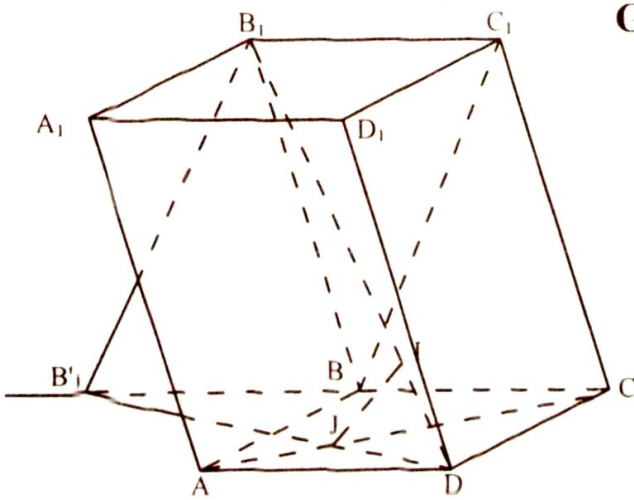
- a) Hình bình hành  $ACC'A'$  có hai đường chéo là  $AC'$  và  $A'C$  cắt nhau tại trung điểm  $M$  của mỗi đường. Tương tự, hai đường chéo  $BD'$  và  $B'D$  cắt nhau tại trung điểm  $N$  của mỗi đường.
- b) Phép chiếu theo phương  $AA'$ . Trung điểm  $E$  của  $AC$  là hình chiếu của trung điểm  $M$  của  $AC'$ . Tương tự, trung điểm  $F$  là hình chiếu trung điểm  $N$  của đường chéo  $BD'$  trên  $BD$ .



Ta có  $EM \parallel CC'$  và  $EM = \frac{CC'}{2}$ . Mà  $FN \parallel DD'$  và  $FN = \frac{DD'}{2}$  nên tứ giác

$MNFE$  là hình bình hành và  $MN = EF$ .

**Ví dụ 12:** Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Tìm điểm  $I$  trên đường chéo  $B_1D$  và điểm  $J$  trên đường chéo  $AC$  sao cho  $IJ \parallel BC_1$ . Tính tỉ số  $\frac{ID}{IB_1}$ .



### Giải

Giả sử đã tìm được  $I \in B_1D$ ,  $J \in AC$  sao cho  $IJ \parallel BC_1$ . Xét phép chiếu song song theo phương  $C_1B$  lên  $mp(ABCD)$ . Khi đó hình chiếu của các điểm  $D, I, B_1$  thẳng hàng là  $D, J, B_1$  thẳng hàng. Vậy  $J$  chính là giao điểm của hai đường thẳng  $B_1D$  và  $AC$ .

Từ đó ta có  $J$  như sau:

Vẽ  $\overrightarrow{B_1B'_1} = \overrightarrow{C_1B}$ ,  $B'_1D \cap AC = J$ .

Trong  $mp(B_1B'_1D)$ , vẽ  $JI$  song song với  $B_1B'_1$  cắt  $B_1D$  tại  $I$ .

Ta có  $B'_1$  thuộc đường thẳng  $BC$  và  $AD = \frac{1}{2}B'_1C$ .

$$\Rightarrow \frac{ID}{IB_1} = \frac{JD}{JB_1} = \frac{AD}{B'_1C} = \frac{1}{2}.$$

## C. BÀI LUYỆN TẬP

1. Vẽ hình biểu diễn của:

- a) một hình chóp đáy tam giác  
b) một hình chóp đáy tứ giác



2. Vẽ hình biểu diễn của:

- a) một tứ diện và các trung điểm của các cạnh
- b) một tứ diện và trọng tâm của một mặt.

**HD:** dùng tính chất thẳng hàng và tỉ lệ cùng phương

3. Vẽ hình biểu diễn của:

- a) hai tam giác vuông cùng cạnh huyền nội tiếp đường tròn
- b) một lục giác đều nội tiếp đường tròn.

4. Trong mặt phẳng (P) cho một tam giác ABC. Chứng minh có thể xem ABC là hình chiếu song song của một tam giác cân, tam giác vuông nào đó.

5. Hãy chọn phép chiếu song song (phương chiếu và mặt chiếu) để hình chiếu của một tứ diện cho trước là một hình bình hành mà mặt chiếu không song song hay chứa mặt nào của tứ diện.

**HD:** Gọi M, N là 2 trung điểm của 2 cạnh đối diện. Chọn phương chiếu là MN và mặt chiếu (P) cắt MN mà không song song hay chứa mặt nào của tứ diện

6. Cho hai điểm A và B ở ngoài mặt phẳng (P). Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu song song của A và B trên (P) theo phương của đường thẳng d cho trước. Chứng minh nếu AB song song với (P) thì  $A'B' = AB$ . Phần đảo có đúng không?

**HD:** phần đảo không đúng

7. Cho hai điểm A và B ở ngoài (P), giả sử đường thẳng AB cắt (P) tại điểm O. Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu song song của A và B trên (P) theo phương của đường thẳng d.

a) Ba điểm O, A', B' có thẳng hàng không? Vì sao?

b) Hãy chọn phương chiếu d sao cho  $A'B' = AB$ .

c) Hãy chọn phương chiếu d sao cho  $A'B' = 2AB$ .

**ĐS:** a) ba điểm O, A', B' thẳng hàng

8. Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

a) Chứng minh hình chiếu song song của điểm G trên mặt phẳng (BCD) theo phương chiếu AD là trọng tâm của tam giác BCD.

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của cạnh AB, AC, AD. Tìm hình chiếu song song theo phương AD của các điểm M, N, P.

**HD:** b) phép chiếu song song bảo toàn tỉ lệ trên cùng một đường thẳng hay hai đường thẳng song song.

9. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N, K lần lượt là các điểm thuộc ba mặt bên (AA', BB'), (BB', CC'), (CC', DD').

a) Xác định các giao điểm của các đường thẳng MN, NK, KM với hai đáy.

b) Mặt phẳng (MNK) cắt hình hộp theo một thiết diện gì?

**HD:** dùng phép chiếu song song theo phương AA'.

ABC



# VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

## QUAN HỆ VUÔNG GÓC

### §1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

#### SỰ ĐỒNG PHẪNG CỦA VECTƠ

#### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Định nghĩa vectơ và các phép toán vectơ trong không gian cũng giống như trong mặt phẳng:

- Tổng 2 vectơ:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

- Hiệu 2 vectơ:  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$

- Nhân vectơ với 1 số:  $k\vec{a}$

- Hai vectơ cùng phương: giá của chúng song song hoặc trùng nhau,  $\vec{b} = k\vec{a}$

- Tích vô hướng:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$

- Quy tắc trung điểm: I là trung điểm của AB thì:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \text{ và với mọi điểm M thì: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

- Quy tắc trọng tâm: G là trọng tâm của tam giác ABC thì:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}, \text{ và với mọi điểm M thì:}$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

- Quy tắc hình bình hành: Cho hình bình hành ABCD thì:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$$

• Trong không gian:

- Trọng tâm tứ diện: G là trọng tâm tứ diện ABCD thì

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}, \text{ và với mọi điểm M thì:}$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$$

- Quy tắc hình hộp: ABCD.A'B'C'D' là hình hộp thì:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$$

• Sự đồng phẳng của 3 vectơ:

- Ba vectơ gọi là đồng phẳng khi các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.



- Điều kiện cần và đủ để ba vector  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  đồng phẳng là có ba số  $m$ ,  $n$ ,  $p$  không đồng thời bằng 0 sao cho  $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$
- Nếu ba vector  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  không đồng phẳng thì mỗi vector  $\vec{d}$  đều có thể viết dưới dạng  $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ , với các số  $m$ ,  $n$ ,  $p$  duy nhất.

## B. PHÂN DẠNG TOÁN

### DẠNG 1: TOÁN CHỨNG MINH

- Sử dụng các phép toán cộng, trừ, nhân vector với một số, tích vô hướng.
- Sử dụng các quy tắc trung điểm, trọng tâm tam giác, trọng tâm tứ diện, quy tắc hình bình hành, hình hộp...
- Điểm M chia đoạn AB theo tỉ  $k \neq 1$ :  $\vec{MA} = k\vec{MB}$ , và với mọi điểm O thì:  $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} - k\vec{OB}}{1 - k}$ .
- Hai tam giác ABC, A'B'C' cùng trọng tâm khi và chỉ khi:  $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \vec{0}$ .

**Ví dụ 1:** Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh:

a)  $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC}) = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{BD})$

b) Điểm G là trọng tâm của tứ diện ABCD khi và chỉ khi:

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$$

**Giải**

a) Sử dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AD} + \vec{DN}$$

$$\vec{MN} = \vec{MB} + \vec{BC} + \vec{CN}$$

Vì M, N là trung điểm của AB, CD nên:

$$\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$$

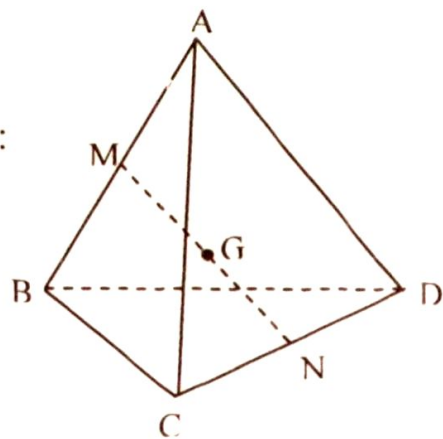
$$\vec{DN} + \vec{CN} = \vec{0}$$

Do đó:  $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$

Tương tự thì:  $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{BD})$

b) Ta có:  $\vec{GA} + \vec{GB} = 2\vec{GM}$ ,  $\vec{GC} + \vec{GD} = 2\vec{GN}$

Do đó:  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{GM} + 2\vec{GN} = \vec{0}$





$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0} \Leftrightarrow G \text{ là trung điểm của } MN.$$

$\Leftrightarrow G$  là trọng tâm tứ diện  $ABCD$ .

**Ví dụ 2:** Cho tứ diện  $ABCD$  với trọng tâm  $G$ :

a) Chứng minh:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$

b) Gọi  $A'$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Chứng minh:

$$\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$$

**Giải**

a) Gọi  $M, N$  là trung điểm của  $AB, CD$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$$

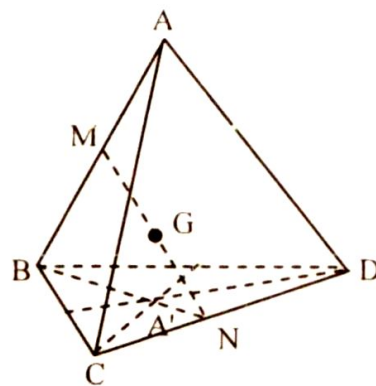
$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AN}$$

Vì  $G$  là trung điểm của  $MN$  nên:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = 4\overrightarrow{AG}$$

b)  $\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D} \cdot \overrightarrow{AA'}$

$$= \overrightarrow{AA'}(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'D}) = 0, \text{ vì } A' \text{ trọng tâm tam giác } BCD.$$



**Ví dụ 3:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $D_1, D_2, D_3$  lần lượt là điểm đối xứng của điểm  $D'$  qua  $A, B', C$ . Chứng tỏ rằng  $B$  là trọng tâm của tứ diện  $D_1D_2D_3D'$ .

**Giải**

$$\text{Đặt } \overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$$

$$\text{Từ giả thiết, ta có: } \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{BD_1} = 2\overrightarrow{BA} = -2\vec{b}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{BD'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}. \text{ Vậy } \overrightarrow{BD_1} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$$

$$\text{Lập luận tương tự như trên ta có: } \overrightarrow{BD_2} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$

$$\text{và } \overrightarrow{BD_3} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}. \text{ Vậy } \overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{BD_2} + \overrightarrow{BD_3} + \overrightarrow{BD'} = \vec{0}$$

Điều này chứng tỏ  $B$  là trọng tâm của tứ diện  $D_1D_2D_3D'$ .

**Ví dụ 4:** Cho hình chóp  $S.ABCD$ .

a) Chứng minh rằng nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì

$$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}. \text{ Điều ngược lại có đúng không?}$$

b) Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Chứng tỏ rằng  $ABCD$  là hình bình hành khi và chỉ khi  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$

**Giải**

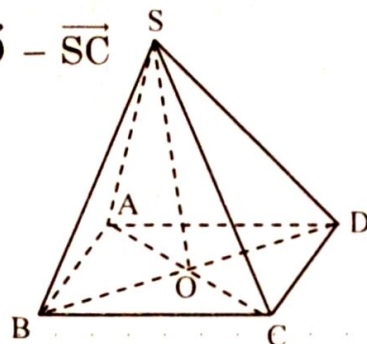
a) Ta có:  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SC}$   
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}.$

Vậy với hình chóp  $S.ABCD$  thì  $ABCD$  là hình bình hành khi và chỉ khi  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$

b) Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC, BD$  thì:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON}.$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$$





$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{SO}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$$

$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \overrightarrow{0}$  điều này chứng tỏ O, M, N thẳng hàng. Mặt khác M thuộc AC, N thuộc BD và O là giao điểm của AC và BD nên O, M, N thẳng hàng chỉ xảy ra khi  $O \equiv M \equiv N$ , tức O là trung điểm của AC và BD, hay ABCD là hình bình hành: đpcm.

**Ví dụ 5:** Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' với tâm O. Chứng minh:

a)  $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{A'C'}$$

b)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{0}$

**Giải**

a) Ta có ABCD, ACC'A' là các hình bình hành nên:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC'} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{D'D} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{A'C'} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C'C} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{A'C'}\end{aligned}$$

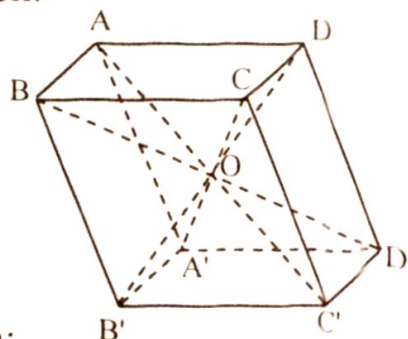
Vì  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B'C'}$ ,  $\overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{D'D}$  nên:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{A'C'}$$

b) Vì tâm O là trung điểm của các đường chéo AC', BD', CA', DB' nên:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{0}, \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{0}, \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{0},$$

$$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{0}. \quad \text{Cộng lại thì có đpcm.}$$



**Ví dụ 6:** Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có P và R lần lượt là trung điểm các cạnh AB và A'D'. Gọi P', Q, Q', R' lần lượt là tâm của các hình bình hành ABCD, CDD'C, A'B'C'D', ADD'A'. Chứng minh hai tam giác PQR và P'Q'R' có cùng trọng tâm.

**Giải**

$$\text{Ta chứng minh rằng } \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \overrightarrow{0}$$

$$\text{Tam giác ABD có PP' là đường trung bình nên } \overrightarrow{PP'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$$

$$\text{Tương tự: } \overrightarrow{QQ'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DA'}; \quad \overrightarrow{RR'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A'A}$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA'} + \overrightarrow{A'A}) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \text{đpcm.}$$



**Ví dụ 7:** Trên mặt phẳng (P) cho hình bình hành  $A_1B_1C_1D_1$ . Về một phía đối với mặt phẳng (P) ta dựng hình bình hành  $A_2B_2C_2D_2$ . Trên các đoạn  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2$  ta lần lượt lấy các điểm A, B, C, D sao cho:  $\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{BB_1}{BB_2} = \frac{CC_1}{CC_2} = \frac{DD_1}{DD_2} = k$ . Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình bình hành.

**Giải**

Lấy điểm O, đặt  $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}_1, \overrightarrow{OB_1} = \vec{b}_1, \overrightarrow{OC_1} = \vec{c}_1, \overrightarrow{OD_1} = \vec{d}_1$ .

$A_1B_1C_1D_1$  là hình bình hành nên:

$$\vec{a}_1 + \vec{c}_1 = \vec{b}_1 + \vec{d}_1.$$

Tương tự đặt:

$$\overrightarrow{OA_2} = \vec{a}_2, \overrightarrow{OB_2} = \vec{b}_2, \overrightarrow{OC_2} = \vec{c}_2,$$

$$\overrightarrow{OD_2} = \vec{d}_2 \text{ thì } \vec{a}_2 + \vec{c}_2 = \vec{b}_2 + \vec{d}_2$$

Đặt  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{OD} = \vec{d}$

Ta có A chia  $A_1A_2$  theo tỉ số -k nên  $\vec{a} = \frac{\vec{a}_1 + k\vec{a}_2}{1+k}$

Tương tự  $\vec{b} = \frac{\vec{b}_1 + k\vec{b}_2}{1+k}, \vec{c} = \frac{\vec{c}_1 + k\vec{c}_2}{1+k}, \vec{d} = \frac{\vec{d}_1 + k\vec{d}_2}{1+k}$

$$\text{Do đó } \vec{a} + \vec{c} = \frac{(\vec{a}_1 + \vec{c}_1) + k(\vec{a}_2 + \vec{c}_2)}{1+k},$$

$$\vec{b} + \vec{d} = \frac{(\vec{b}_1 + \vec{d}_1) + k(\vec{b}_2 + \vec{d}_2)}{1+k}$$

$$\Rightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

Vậy ABCD là hình bình hành.

**Ví dụ 8:** Cho hình chóp S.ABCD đáy là tứ giác, M là trung điểm cạnh AB, N là trung điểm của cạnh CD, G và  $G_1$  lần lượt là trọng tâm của đáy và mặt bên (SCD).

a) Xác định I:  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IS} = \vec{0}$

b) Chứng minh SG và  $MG_1$  qua I, từ đó chứng minh rằng đoạn thẳng nối từ đỉnh với trọng tâm của đáy cùng với bốn đoạn thẳng nối trung điểm của một cạnh đáy với trọng tâm mặt đối diện thì đồng quy tại I.

c) E là trung điểm của SA, đường thẳng EI cắt mặt phẳng đáy tại F, chứng minh F là trọng tâm của  $\Delta BCD$ .

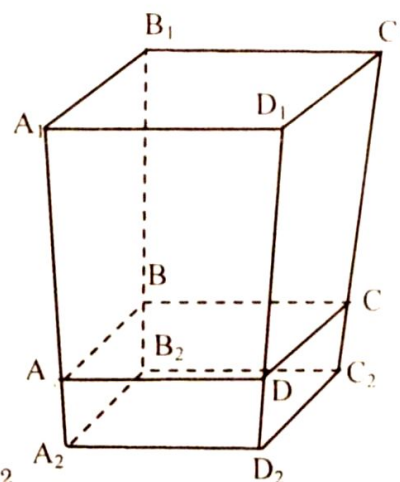
**Giải**

a) Vì M, N là trung điểm của AB và CD, ta có:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IN}$$

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN})$$

G là trung điểm của MN nên:





$$\begin{aligned}\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} &= 2\overrightarrow{IG} \\ \text{và } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} &= 2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0} \\ \text{nên } G &\text{ là trọng tâm của } ABCD. \\ \text{Do đó } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} &= 4\overrightarrow{IG} \\ \text{nên } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IS} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IS} &= \vec{0}\end{aligned}$$

Vậy I là điểm trên đoạn SG và  $\frac{IG}{IS} = \frac{1}{4}$

- b)  $G_1$  là trọng tâm  $\triangle SCD$  nên có  $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IS} = 3\overrightarrow{IG_1}$   
Do đó  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IS} = 2\overrightarrow{IM} + 3\overrightarrow{IG_1} = \vec{0}$

Suy ra I là điểm trên đoạn  $MG_1$  và  $\frac{IM}{IG_1} = \frac{3}{2}$ .

Vậy  $MG_1$  qua I và SG qua I.

Tương tự chứng minh ba đoạn thẳng nối các cặp trung điểm của BC; CD; AD với trọng tâm của  $\triangle SAD$ ;  $\triangle SAB$ ;  $\triangle SBC$  đều qua I.

- c) Giả sử F là trọng tâm  $\triangle BCD$  nên có  $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 3\overrightarrow{IF}$ .

E là trung điểm của SA nên có  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IS} = 2\overrightarrow{IE}$ .

Do đó  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IS} = 2\overrightarrow{IE} + 3\overrightarrow{IF} = \vec{0}$  suy ra I là điểm thuộc đoạn EF và  $\frac{IE}{IF} = \frac{3}{2}$ , EF qua I, và F là giao điểm của EI với mặt

đáy ABCD và F là trọng tâm  $\triangle BCD$ .

**Ví dụ 9:** Chứng minh với 4 điểm bất kì A, B, C thì:

- a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ ;  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$   
b)  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

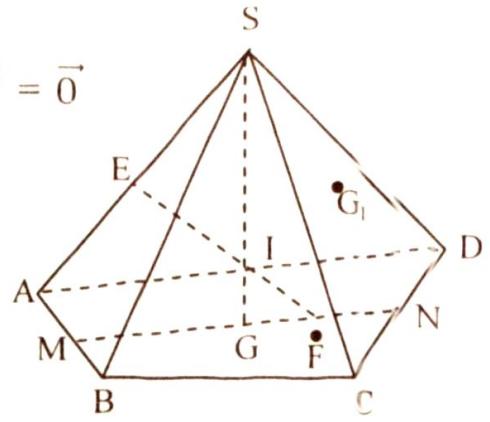
**Giải**

- a) Ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC})$   
 $= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

$$\begin{aligned}\text{Và } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

- b) Đưa về gốc D. Ta có:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{DA} (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{DB} (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DC} (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) \\ &= \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = 0\end{aligned}$$





**Ví dụ 10:** Cho tam giác ABC và một điểm O. Với mỗi điểm M trong không gian, ký hiệu:  $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 - 3MO^2$ . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để O là trọng tâm  $\Delta ABC$  là  $f(M)$  luôn không đổi với mọi điểm M.

**Giải**

Gọi G là trọng tâm của  $\Delta ABC$ , thì:

$$f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 - 3MO^2 = 3MG^2 - 3MO^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2) = 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MO}) \cdot \overrightarrow{OG} + (GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

Nếu  $O \equiv G$  thì  $f(M) = GA^2 + GB^2 + GC^2 =$  hằng số,  $\forall M$

Nếu  $f(M) =$  hằng số, thì:  $f(O) = f(G)$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OG} = 3\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{OG} \Rightarrow 6.OG^2 = 0, \text{ hay } O \equiv G.$$

**Ví dụ 11:** Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng:

a) Nếu ABCD là hình chữ nhật thì với mọi điểm M trong không gian ta luôn có  $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ .

b) Nếu ABCD là hình bình hành thì  $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2$  không phụ thuộc vào vị trí điểm M trong không gian. Điều ngược lại có đúng không?

**Giải**

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có:

$$MA^2 + MC^2 = 2MO^2 + \frac{AC^2}{2}; MB^2 + MD^2 = 2MO^2 + \frac{BD^2}{2}$$

Vì ABCD là hình chữ nhật nên  $AC = BD$ .

Vậy  $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ .

b) Gọi I, J lần lượt trung điểm của AC và BD, khi đó:

$$\begin{aligned} & MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2 \\ &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 - (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB})^2 - (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JD})^2 \\ &= 2MI^2 + IA^2 + IC^2 - 2MJ^2 - JB^2 - JD^2 \\ &= 2(MI^2 - MJ^2) + \frac{1}{2}(AC^2 - BD^2). \end{aligned}$$

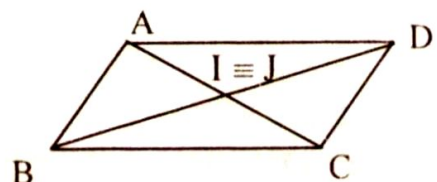
Nếu ABCD là hình bình hành thì  $I \equiv J$ , khi đó:

$$MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2 = \frac{1}{2}(AC^2 - BD^2)$$

Tức là  $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2$  không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

Ngược lại, nếu  $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2$  không phụ thuộc vào vị trí của điểm M thì  $MI^2 - MJ^2$  cũng là hằng số. Khi đó chọn M lần lượt là điểm I và điểm J thì  $II^2 - IJ^2 = JJ^2 - JJ^2$ , suy ra  $-IJ^2 = IJ^2$ , tức là  $IJ = 0$  hay  $I \equiv J$ .

Vậy ABCD là hình bình hành.



**Ví dụ 12:** Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J, H, K, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, BC, AD, AC, BD. Chứng minh rằng:

$$AB^2 + CD^2 + AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = 4(IJ^2 + HK^2 + EF^2).$$

ABC



### Giải

Trước hết, ta chứng minh:

$$AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = AB^2 + CD^2 + 4IJ^2$$

Đặt  $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$ .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} = -\frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{DC}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) + (-\vec{a}) + \frac{\vec{c}}{2} = \frac{-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}}{2} \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 4\overrightarrow{IJ}^2 &= (\vec{b} - \vec{a})^2 + \vec{c}^2 + (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})^2 \\ &= 2\vec{b}^2 + 2\vec{a}^2 + 2\vec{c}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{AD}^2 &= (\vec{c} - \vec{a})^2 + \vec{b}^2 + (\vec{c} - \vec{b})^2 + \vec{a}^2 \\ &= 2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 + 2\vec{c}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

Vậy ta có:  $AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = AB^2 + CD^2 + 4IJ^2$

Tương tự ta có:

$$AC^2 + BD^2 + AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 + 4HK^2$$

$$AB^2 + CD^2 + BC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$$

Do đó:

$$AB^2 + CD^2 + AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = 4(IJ^2 + HK^2 + EF^2).$$

**Ví dụ 13:** Chứng minh rằng với hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  tùy ý ta luôn luôn có:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \geq (\vec{a} \cdot \vec{b})^2. \text{ Dấu } = \text{ xảy ra khi nào?}$$

### Giải

Ta có:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$  nên:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 \cdot \cos^2(\vec{a}, \vec{b}) \leq \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2.$$

Dấu = xảy ra khi  $\cos(a, b) = \pm 1$  tức là khi  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  cùng phương.

**Ví dụ 14:** Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng.

a) Đặt  $\widehat{xOy} = \alpha$ ,  $\widehat{yOz} = \beta$ ,  $\widehat{zOx} = \gamma$ . Chứng minh rằng:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > -\frac{3}{2}.$$

b) Gọi  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$  lần lượt là các tia phân giác của các góc  $xOy, yOz, zOx$ . Chứng minh rằng nếu  $Ox_1$  và  $Oy_1$  vuông góc với nhau thì  $Oz_1$  vuông góc với cả  $Ox_1$  và  $Oy_1$ .

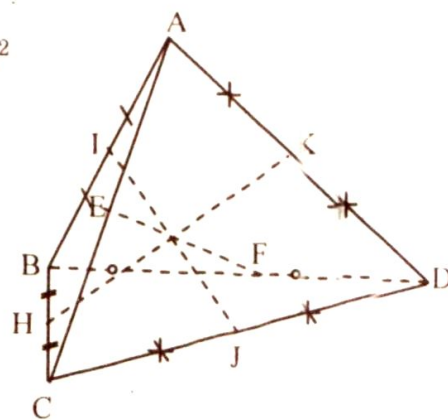
### Giải

Lấy  $E_1, E_2, E_3$  lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz sao cho

$$OE_1 = OE_2 = OE_3 = 1.$$

Chọn cơ sở  $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1, \overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2, \overrightarrow{OE_3} = \vec{e}_3$

a) Do ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng nên:  $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 > 0$





$$\text{do đó } \vec{e}_1^2 + \vec{e}_2^2 + \vec{e}_3^2 + (2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1) > 0$$

$$\Leftrightarrow 3 + 2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) > 0$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > -\frac{3}{2}.$$

b) Ta có:  $\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2} \parallel Ox_1$

$$\overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_3} \parallel Oy_1; \overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_1} \parallel Oz_1$$

$$\text{Vì } Ox_1 \perp Oy_1 \Rightarrow (\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2})(\overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_3}) = 0$$

$$\text{Hay } \overrightarrow{OE_2}^2 + \overrightarrow{OE_1} \cdot \overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_1} \cdot \overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_2} \cdot \overrightarrow{OE_3} = 0$$

$$\text{Ta có: } (\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2})(\overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_1})$$

$$= \overrightarrow{OE_1}^2 + \overrightarrow{OE_1} \cdot \overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_2} \cdot \overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_1} \cdot \overrightarrow{OE_3} = 0$$

Vậy  $Ox_1 \perp Oz_1$ . Tương tự, ta cũng có  $Oy_1 \perp Oz_1$ .

## DẠNG 2: TÍNH TOÁN VÀ BIỂU DIỄN

- Để tính đoạn AB ta có thể tính bình phương vô hướng  $\overrightarrow{AB}^2$  trong hệ cơ sở gồm 3 vector không đồng phẳng.

- Để tính góc giữa 2 vector  $\vec{a}, \vec{b}$  ta có thể tính  $|\vec{a}|, |\vec{b}|$  và  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  trong hệ cơ sở.

- Để biểu diễn một vector trong hệ cơ sở ta thường đưa về cùng gốc để tính, chẳng hạn vector  $\overrightarrow{MN}$  và gốc O thì tính trước  $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$  theo hệ cơ sở, từ đó có:  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ .

**Ví dụ 1:** Cho hai điểm A, B. Tìm điểm M sao cho  $k\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ , trong đó k, t là hai số thực cho trước. Biện luận theo k, t.

**Giải**

Lấy một điểm O nào đó, ta có:

$$k\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow k(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}) + t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow k\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = (k+t)\overrightarrow{OM}. \text{ Biện luận:}$$

$$\text{Nếu } k+t \neq 0 \text{ ta có } \overrightarrow{OM} = \frac{k\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}}{k+t}.$$

Vậy điểm M được xác định một cách duy nhất.

Nếu  $k+t=0$  mà  $k\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \vec{0}$ , thì mọi điểm M trong không gian đều thỏa mãn điều kiện đòi hỏi.

Nếu  $k+t=0$  mà  $k\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ , không tồn tại điểm M.

**Ví dụ 2:** Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'.

$$\text{Đặt } \overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$$



a) Hãy biểu thị mỗi vector  $\overrightarrow{B'C}$ ,  $\overrightarrow{BC'}$  qua các vector  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ .

b) Gọi  $G'$  là trọng tâm tam giác  $A'B'C'$ . Biểu thị vector  $\overrightarrow{AG'}$  qua  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ .

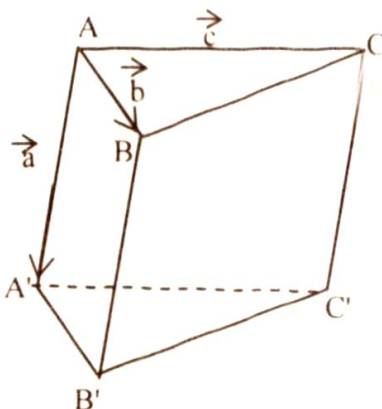
**Giải**

a)  $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ .

b) Vì  $G'$  là trọng tâm tam giác  $A'B'C'$  nên:

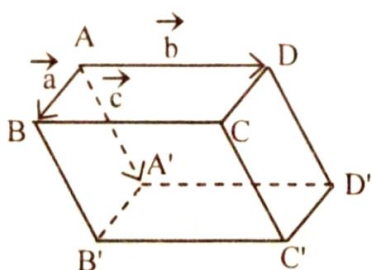
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG'} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}) \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'}) \\ &= \frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$



**Ví dụ 3:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Đặt:  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$

Hãy biểu thị các vector  $\overrightarrow{AC'}$ ,  $\overrightarrow{BD'}$ ,  $\overrightarrow{CA'}$ ,  $\overrightarrow{DB'}$ ,  $\overrightarrow{BC'}$ ,  $\overrightarrow{A'D}$ .

**Giải**



$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \vec{b} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{b} - \vec{c}$$

**Ví dụ 4:** Cho hình tứ diện  $ABCD$ , gọi  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  lần lượt là trọng tâm của các mặt  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$ ,  $ABC$ . Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{CC'} = \vec{c}$ . Hãy biểu thị các vector sau đây theo  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ :  $\overrightarrow{DD'}$ ,  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{DA}$ .

**Giải**

Gọi  $G$  là trọng tâm tứ diện  $ABCD$ , khi đó:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \text{ hay } \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$$

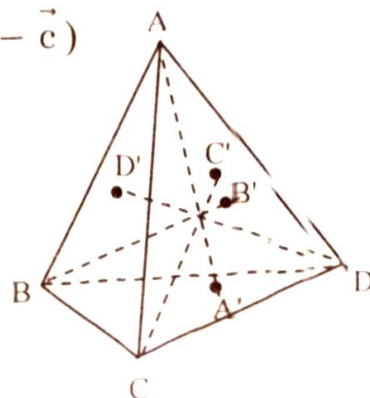
nên  $\overrightarrow{DD'} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BB'} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'} = \frac{3}{4}(\vec{a} - \vec{b})$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{CC'} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BB'} = \frac{3}{4}(\vec{b} - \vec{c})$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{DD'} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CC'}$$

$$= \frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{c}) = \frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})$$





$$\begin{aligned}\overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GD} = -\frac{3}{4} \overrightarrow{AA'} + \frac{3}{4} \overrightarrow{DD'} \\ &= \frac{3}{4} (-\vec{a} - \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) = -\frac{3}{4} (2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).\end{aligned}$$

**Ví dụ 5:** Cho tứ diện ABCD có  $AB = c$ ,  $CD = c'$ ,  $AC = b$ ,  $BD = b'$ ,  $BC = a$ ,  $AD = a'$ . Tính góc giữa các vector  $\overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{DA}$ .

**Giải:**

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} \\ &= \frac{1}{2} (CB^2 + CD^2 - BD^2) - \frac{1}{2} (CB^2 + CA^2 - AB^2) \\ &= \frac{1}{2} (AB^2 + CD^2 - BD^2 - CA^2)\end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}) = \frac{c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2}{2aa'}.$$

**Ví dụ 6** Cho hình chóp tam giác S.ABC có các cạnh  $SA = SB = SC = AB = AC = a$  và  $BC = a\sqrt{2}$ . Tính góc giữa hai vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{SC}$ .

**Giải**

Ta có

$$\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}}{a^2} = \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{a^2}$$

Theo giả thiết ta có các tam giác đều là SAB, SAC và các tam giác vuông là ABC vuông tại A và SBC vuông tại S nên:

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

$$\text{và } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \text{ do đó: } \cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{-\frac{a^2}{2}}{a^2} = -\frac{1}{2}$$

Vậy góc giữa hai vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{SC}$  bằng  $120^\circ$ .

**Ví dụ 7:** Cho hình chóp S.ABC có  $SA = SB = SC = b$  và đôi một hợp với nhau góc  $30^\circ$ . Tính khoảng cách từ S đến trọng tâm G của tam giác ABC.

**Giải**

Ta có  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SG}$  nên:

$$\begin{aligned}9SG^2 &= (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})^2 \\ &= SA^2 + SB^2 + SC^2 + 2\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA} \\ &= 3b^2 + 3 \cdot 2b^2 \cdot \cos 30^\circ = 3b^2(1 + \sqrt{3}).\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } SG = \frac{b}{3} \sqrt{3(1 + \sqrt{3})}.$$

**ABC**



**Ví dụ 8:** Cho hình tứ diện đều ABCD có tất cả các cạnh bằng  $m$ . Các điểm M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính độ dài MN.

b) Tính góc giữa  $\overrightarrow{MN}$  với các vector  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$ .

**Giải**

Đặt  $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$

Khi đó, ta có:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}m^2.$$

$$\text{và } \vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = m^2.$$

a) Vì M, N là trung điểm của AB và CD nên:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) \text{ hay } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})$$

$$\begin{aligned} \text{nên } MN^2 &= \overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{4}(\vec{a}^2 + \vec{c}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c}) \\ &= \frac{1}{4}(m^2 + m^2 + m^2 + m^2 - m^2 - m^2) = \frac{2m^2}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } MN = \frac{m\sqrt{2}}{2}.$$

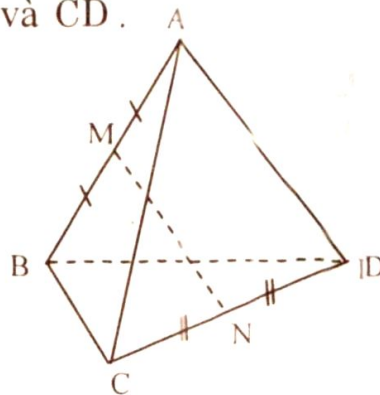
$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b}^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{2} + \frac{m^2}{2} - m^2\right) = 0 \end{aligned}$$

Vậy góc giữa hai vector  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{AB}$  bằng  $90^\circ$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CD} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{c}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{c}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c}) \\ &= \frac{1}{2}\left(m^2 + \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} - m^2 + \frac{m^2}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Vậy góc giữa hai vector  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{CD}$  bằng  $90^\circ$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})(-\vec{b} + \vec{c}) \\ &= \frac{1}{2}(-\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2 - \vec{b} \cdot \vec{c}) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} + m^2 + \frac{m^2}{2} + m^2 - \frac{m^2}{2}\right) = \frac{1}{2}m^2. \end{aligned}$$





$$\text{Mà } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC})$$

$$\text{Từ đó: } \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\frac{m^2}{2}}{m \cdot \frac{m\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy góc giữa hai vector  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{BC}$  bằng  $45^\circ$ .

### DẠNG 3: QUAN HỆ ĐỒNG PHẪNG

- Ba vector gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

- Cho ba vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , trong đó  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Điều kiện cần và đủ để ba vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng là có các số  $m, n$  sao cho  $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ . Hơn nữa các số  $m, n$  là duy nhất.

- Biểu diễn A, B, C, D đồng phẳng khi  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$  đồng phẳng.

- Nếu  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  là ba vector không đồng phẳng thì với mỗi vector  $\vec{d}$ , ta tìm được các số  $m, n, p$  sao cho  $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ . Hơn nữa, các số  $m, n, p$  là duy nhất.

Chú ý: - Chọn hệ cơ sở gồm 3 vector không đồng phẳng.

- Hỗ trợ bởi các quan hệ song song, giao tuyến song song.

- Dùng điều kiện đồng phẳng để lập hệ thức giữa các hệ số.

**Ví dụ 1:** Chứng minh:

a) Nếu có  $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$  và một trong ba số  $m, n, p$  khác không thì ba vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng.

b) Nếu  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  là ba vector không đồng phẳng và  $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$  thì  $m = n = p = 0$ .

**Giải**

a) Nếu có  $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$  và  $m^2 + n^2 + p^2 > 0$  thì  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng.

Thật vậy, giả sử  $m \neq 0$ , từ đó ta có  $\vec{a} = -\frac{n}{m}\vec{b} - \frac{p}{m}\vec{c}$ .

Đẳng thức này khẳng định ba vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng: đpcm.

b) Mệnh đề này tương đương với mệnh đề ở câu a). Vì nếu có một số khác 0, chẳng hạn  $m \neq 0$  thì suy ra ba vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng: vô lý

**Ví dụ 2:** Ba vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  có đồng phẳng không nếu một trong hai điều sau đây xảy ra?

a) Có một vector trong ba vector đó bằng  $\vec{0}$ .



b) Có hai vector trong ba vector đó cùng phương.

**Giải**

a) Nếu trong ba vector  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  có một vector bằng  $\vec{0}$ , chẳng hạn  $\vec{a} = \vec{0}$  thì ba vector  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  đồng phẳng vì đẳng thức sau luôn đúng:

$$1.\vec{a} + 0.\vec{b} + 0.\vec{c} = \vec{0}.$$

b) Nếu hai trong ba vector  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  cùng phương, chẳng hạn  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  thì  $\vec{b} = k\vec{c}$  (ta xét  $\vec{c} \neq \vec{0}$ , vì nếu  $\vec{c} = \vec{0}$  thì theo câu a), ba vector  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  đồng phẳng). Khi đó  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  là ba vector đồng phẳng vì đẳng thức sau luôn đúng:  $0.\vec{a} + 1.\vec{b} - k.\vec{c} = \vec{0}$

Cách khác: Từ gốc O tùy ý, vẽ  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ .

**Ví dụ 3:** Trong không gian cho tam giác ABC. Chứng minh điểm M thuộc mp(ABC) khi và chỉ khi có ba số x, y, z mà  $x + y + z = 1$  sao cho  $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$  với mọi điểm O.

**Giải**

Vì  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  là hai vector không cùng phương nên điểm M thuộc mp(ABC) khi và chỉ khi có:  $\overrightarrow{AM} = l\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = l(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + m(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \text{ với mọi điểm O.}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (1 - l - m)\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC}.$$

Đặt  $1 - l - m = x$ ,  $l = y$ ,  $m = z$  thì:

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}, \text{ với } x + y + z = 1$$

Chú ý: Kết quả này là một cách để chứng minh bốn điểm đồng phẳng.

Đặc biệt M thuộc tam giác ABC khi  $x + y + z = 1$  và  $x, y, z \geq 0$ .

**Ví dụ 4:** Cho hình chóp S.ABC. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho  $SA = aSA'$ ,  $SB = bSB'$ ,  $SC = cSC'$ , trong đó a, b, c, là các số thay đổi. Chứng minh rằng mặt phẳng (A'B'C') đi qua trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi  $a + b + c = 3$ .

**Giải**

Vì A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho  $SA = aSA'$ ,  $SB = bSB'$ ,  $SC = cSC'$  nên:

$$\overrightarrow{SA} = a\overrightarrow{SA'}, \overrightarrow{SB} = b\overrightarrow{SB'}, \overrightarrow{SC} = c\overrightarrow{SC'}$$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì:

$$\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) \Rightarrow \overrightarrow{SG} = \frac{a}{3}\overrightarrow{SA'} + \frac{b}{3}\overrightarrow{SB'} + \frac{c}{3}\overrightarrow{SC'}$$

Mặt phẳng (A'B'C') đi qua G khi và chỉ khi bốn điểm G, A', B', C' đồng phẳng, nên theo ví dụ trên, điều đó xảy ra nếu và chỉ nếu  $\frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3} = 1$ .

tức là  $a + b + c = 3$ .



**Ví dụ 5:** Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho  $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MD}$  và trên cạnh BC lấy điểm N sao cho  $\overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NC}$ . Chứng minh rằng ba vector  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{MN}$  đồng phẳng.

**Giải**

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$$

$$\text{và } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{DC} + 3\overrightarrow{CN}. \text{ Do đó:}$$

$$4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{CN}$$

$$= \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$$

Hệ thức trên chứng tỏ rằng ba vector  $\overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{DC}$  đồng phẳng.

**Ví dụ 6:** Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành ABB'A' và K là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành BCC'B'. Chứng minh rằng ba vector  $\overrightarrow{BD}$ ,  $\overrightarrow{IK}$ ,  $\overrightarrow{B'C'}$  đồng phẳng.

**Giải**

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

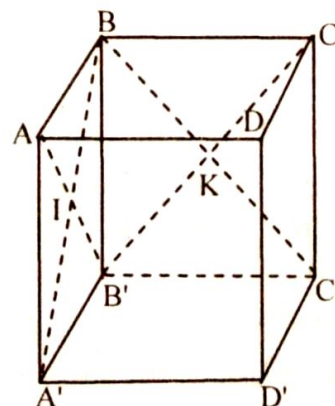
$$= \overrightarrow{B'C'} + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$$

$$= \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'C'} - 2\overrightarrow{IK}$$

$$= 2\overrightarrow{B'C'} - 2\overrightarrow{IK}$$

(Vì IK là đường trung bình của tam giác AB'C)

Vậy  $\overrightarrow{BD}$ ,  $\overrightarrow{IK}$ ,  $\overrightarrow{B'C'}$  đồng phẳng.



**Ví dụ 7:** Cho tứ diện ABCD. Các điểm M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đường thẳng AD và BC sao cho  $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}$ ,  $\overrightarrow{QB} = k\overrightarrow{QC}$  ( $k \neq 1$ ). Chứng minh rằng các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

**Giải**

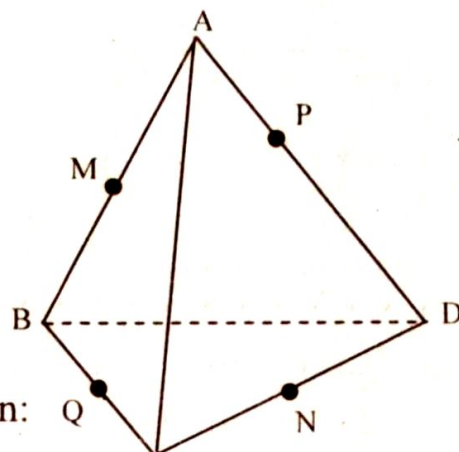
Chọn gốc M. Ta có  $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}$ .

$$\text{nên } \overrightarrow{MP} = \frac{\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MD}}{1 - k}$$

$$\text{Tương tự: } \overrightarrow{MQ} = \frac{\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC}}{1 - k}$$

Mà  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$ , nên:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} &= \frac{1}{1 - k} [\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - k(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})] \\ &= \frac{2k}{k - 1} \overrightarrow{MN} \end{aligned}$$





Do đó  $\overrightarrow{MP}$ ,  $\overrightarrow{MQ}$ ,  $\overrightarrow{MN}$  đồng phẳng nên các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

**Ví dụ 8:** Trong không gian cho hai hình bình hành ABCD và AB'C'D' chỉ có chung nhau một điểm A. Chứng minh rằng

- a) Các vector  $\overrightarrow{BB'}$ ,  $\overrightarrow{CC'}$ ,  $\overrightarrow{DD'}$  đồng phẳng.  
b) Hai tam giác BDC', B'D'C cùng trọng tâm.

**Giải**

- a) Ta có  $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'}$ ,  $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD'}$   
Do đó  $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'})$

Vì  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

và  $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AC'}$

nên  $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{AC'}$

Vậy  $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CC'}$

Hay ta có  $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'}$

nên  $\overrightarrow{BB'}$ ,  $\overrightarrow{CC'}$ ,  $\overrightarrow{DD'}$  đồng phẳng.

- b) Ta có  $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{0}$

Do đó 2 tam giác BDC', B'D'C có cùng trọng tâm.

**Ví dụ 9:** Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng 6 trung điểm các cạnh AB, BB', B'C', C'D', D'D, AD nằm trên cùng một mặt phẳng.

**Giải**

Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, BB', B'C', C'D', D'D, DA và O là tâm của hình hộp.

Đặt  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OB'} = \vec{c}$

thì  $\overrightarrow{OC'} = -\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OD'} = -\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OD} = -\vec{c}$

Từ đó:  $\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

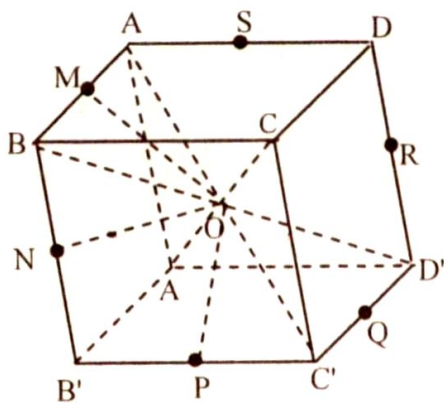
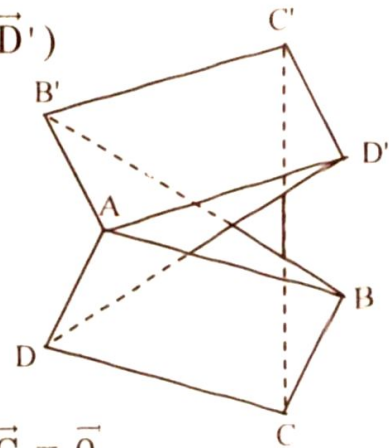
$\overrightarrow{ON} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$ ,  $\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{c} - \vec{a}}{2}$

$\overrightarrow{OQ} = \frac{-\vec{a} - \vec{b}}{2} = -\overrightarrow{OM}$ ,

$\overrightarrow{OR} = -\overrightarrow{OM}$ ,  $\overrightarrow{OS} = -\overrightarrow{OP}$

Ta có:  $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}$  nên ba vector  $\overrightarrow{OM}$ ,  $\overrightarrow{ON}$ ,  $\overrightarrow{OP}$  đồng phẳng và do đó 6 vector  $\overrightarrow{OM}$ ,  $\overrightarrow{ON}$ ,  $\overrightarrow{OP}$ ,  $\overrightarrow{OQ}$ ,  $\overrightarrow{OR}$ ,  $\overrightarrow{OS}$  đồng phẳng.

Vậy các điểm M, N, P, Q, R, S và O đồng phẳng.





**Ví dụ 10:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của  $BB'$  và  $A'C'$ . Điểm K thuộc  $B'C'$  sao cho  $\overrightarrow{KC'} = -2\overrightarrow{KB'}$ . Chứng minh rằng bốn điểm A, I, J, K cùng thuộc một mặt phẳng.

**Giải**

Chọn cơ sở  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$

Ta có:

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a} + \vec{b})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b})$$

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{AK} = \frac{\overrightarrow{AC'} + 2\overrightarrow{AB'}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{c} + 2(\vec{a} + \vec{b})}{3} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}}{3}$$

Do đó, ta có  $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ})$ .

Vậy  $\overrightarrow{AI}$ ,  $\overrightarrow{AJ}$ ,  $\overrightarrow{AK}$  đồng phẳng, tức là các điểm A, I, J, K cùng thuộc một mặt phẳng.

Chú ý: Có thể chứng minh các điểm A, I, J, K thuộc một mặt phẳng bằng cách chứng minh AI và JK cắt nhau tại M trên  $A'B'$ .

**Ví dụ 11:** Cho hình tứ diện ABCD, I, K, E, F là các điểm thỏa mãn:

$$2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}, \quad 2\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}, \quad 2\overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0} \text{ và } 2\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FD} = \vec{0}.$$

Chứng minh:

a) Các vector  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{IK}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  là đồng phẳng, các vector  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{EF}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  là đồng phẳng.

b) Bốn điểm I, E, K, F đồng phẳng.

**Giải**

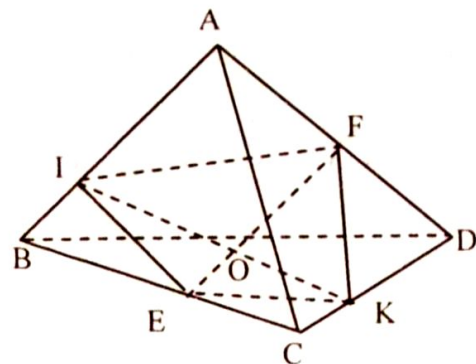
a) Chọn hệ vector cơ sở:

$$\overrightarrow{BC} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{BD} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{BA} = \vec{c}$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \vec{b} - \vec{c}$$

$$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}$$

$$= \frac{2}{3}\vec{c} + (\vec{b} - \vec{c}) + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$$



**ABC**



$$= \frac{2}{3} \vec{c} + (\vec{b} - \vec{c}) + \frac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{\vec{b}}{3} - \frac{\vec{c}}{3}$$

$$\overrightarrow{IK} = \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{c}) = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$$

Do đó  $\overrightarrow{IK}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  đồng phẳng.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\frac{3}{5} \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \frac{3}{5} \overrightarrow{AD} \\ &= -\frac{3}{5} \vec{a} + \vec{c} + \frac{3}{5}(\vec{b} - \vec{c}) = -\frac{3}{5} \vec{a} + \frac{3}{5} \vec{b} + \frac{2}{5} \vec{c} \\ &= \frac{3}{5}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{2}{5} \vec{c} = \frac{3}{5} \overrightarrow{CD} + \frac{2}{5} \overrightarrow{BA} \end{aligned}$$

Vậy  $\overrightarrow{EF}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{BA}$  là các vector đồng phẳng.

b) Ta chứng minh các vector  $\overrightarrow{IE}$ ,  $\overrightarrow{IK}$ ,  $\overrightarrow{IF}$  đồng phẳng.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BE} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{BA} + \frac{3}{5} \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3} \vec{c} + \frac{3}{5} \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IF} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BA} + \frac{3}{5} \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{2}{3} \overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{3} \vec{c} + \frac{3}{5}(\vec{b} - \vec{c}) \\ &= \frac{3}{5} \vec{b} + \frac{1}{15} \vec{c} \text{ và } \overrightarrow{IK} = \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} - \frac{1}{3} \vec{c} \end{aligned}$$

Tìm hai số  $x$  và  $y$  sao cho  $\overrightarrow{IK} = x\overrightarrow{IE} + y\overrightarrow{IF}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} - \frac{1}{3} \vec{c} &= x\left(-\frac{1}{3} \vec{c} + \frac{3}{5} \vec{a}\right) + y\left(-\frac{3}{5} \vec{b} + \frac{1}{15} \vec{c}\right) \\ &= \frac{3}{5} x \vec{a} + \frac{3}{5} y \vec{b} + \left(\frac{1}{15} y - \frac{1}{3} x\right) \vec{c} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó có: } \begin{cases} \frac{3}{5}x = \frac{2}{3} \\ \frac{3}{5}y = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{15}y - \frac{1}{3}x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{9} \\ y = \frac{5}{9} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{IK} = \frac{10}{9} \overrightarrow{IE} + \frac{5}{9} \overrightarrow{IF}.$$

Vậy  $\overrightarrow{IK}$ ,  $\overrightarrow{IE}$ ,  $\overrightarrow{IF}$  đồng phẳng suy ra bốn điểm I, K, E, F đồng phẳng.



**Ví dụ 12:** Cho hình tứ diện ABCD, I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD; M là điểm thuộc AC sao cho  $\overrightarrow{MA} = k_1 \overrightarrow{MC}$ , N là điểm thuộc BD sao cho  $\overrightarrow{NB} = k_2 \overrightarrow{ND}$ . Chứng minh rằng các điểm I, J, M, N cùng thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi  $k_1 = k_2$ .

**Giải**

Vì  $\overrightarrow{MA} = k_1 \overrightarrow{MC}$  nên  $\overrightarrow{IM} = \frac{\overrightarrow{IA} - k_1 \overrightarrow{IC}}{1 - k_1}$

Tương tự ta có:

$$\overrightarrow{IN} = \frac{\overrightarrow{IB} - k_2 \overrightarrow{ID}}{1 - k_2} = \frac{-\overrightarrow{IA} - k_2 \overrightarrow{ID}}{1 - k_2}$$

Mặt khác  $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$

Để các điểm I, J, M, N thuộc một mặt phẳng, điều kiện cần và đủ là ba vector  $\overrightarrow{IM}$ ,  $\overrightarrow{IN}$ ,  $\overrightarrow{IJ}$  đồng phẳng. Vì  $\overrightarrow{IN}$  và  $\overrightarrow{IJ}$  không cùng phương nên điều khẳng định  $\overrightarrow{IM}$ ,  $\overrightarrow{IN}$ ,  $\overrightarrow{IJ}$  đồng phẳng tương đương với:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IM} &= p \overrightarrow{IN} + q \overrightarrow{IJ} \\ \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{IA} - k_1 \overrightarrow{IC}}{1 - k_1} &= p \cdot \frac{-\overrightarrow{IA} - k_2 \overrightarrow{ID}}{1 - k_2} + \frac{q}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) \\ \Leftrightarrow \left( \frac{1}{1 - k_1} + \frac{p}{1 - k_2} \right) \overrightarrow{IA} - \left( \frac{k_1}{1 - k_1} + \frac{q}{2} \right) \overrightarrow{IC} + \left( \frac{pk_2}{1 - k_2} - \frac{q}{2} \right) \overrightarrow{ID} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Do  $\overrightarrow{IA}$ ,  $\overrightarrow{IC}$ ,  $\overrightarrow{ID}$  không đồng phẳng nên đẳng thức trên tương đương với:

$$\begin{cases} \frac{1}{1 - k_1} + \frac{p}{1 - k_2} = 0 \\ \frac{k_1}{1 - k_1} + \frac{q}{2} = 0 \\ \frac{pk_2}{1 - k_2} - \frac{q}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{k_1}{1 - k_1} = -\frac{pk_2}{1 - k_2} = \frac{k_2}{1 - k_1} \Leftrightarrow k_1 = k_2.$$

**Ví dụ 13:** Cho tứ diện ABCD. Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD, DA sao cho  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{DP} = k \overrightarrow{DC}$ . Hãy xác định k để bốn điểm P, Q, M, N cùng nằm trên một mặt phẳng.

**Giải**

Từ  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ , ta có  $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BA}$

ABC



mặt khác  $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$

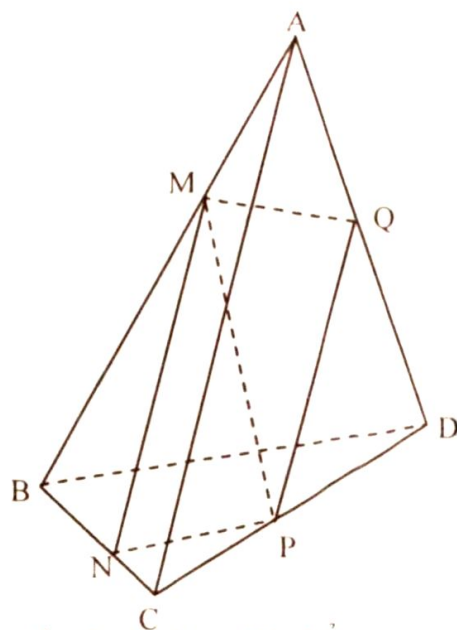
nên  $MN \parallel AC$ .

Nếu có k để các điểm M, N, P, Q thuộc một mặt phẳng thì mp(MNQ) cắt mp(ACD) theo giao tuyến PQ nên  $PQ \parallel AC$ .

Mặt khác  $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$ ,

nên  $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DC}$

Vậy  $k = \frac{1}{2}$  thì các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.



**Ví dụ 14:** Cho tứ diện ABCD. Gọi  $A_1, B_1, C_1, D_1$  là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB, BC, CD, AD sao cho  $\overrightarrow{A_1A} = k\overrightarrow{A_1B}$ ,  $\overrightarrow{B_1B} = k\overrightarrow{B_1C}$ ,  $\overrightarrow{C_1C} = k\overrightarrow{C_1D}$ ,  $\overrightarrow{D_1D} = k\overrightarrow{D_1A}$ . Với giá trị nào của k thì bốn điểm  $A_1, B_1, C_1, D_1$  cùng thuộc một mặt phẳng?

**Giải**

Chọn cơ sở  $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$ . Tìm k để các điểm  $A_1, B_1, C_1, D_1$  cùng thuộc một mặt phẳng tương đương với việc tìm k để có biểu diễn  $\overrightarrow{DA_1} = x\overrightarrow{DB_1} + y\overrightarrow{DC_1} + z\overrightarrow{DD_1}$ , với  $x + y + z = 1$ .

Từ hệ thức  $\overrightarrow{A_1A} = k\overrightarrow{A_1B}$  ta có:

$$\overrightarrow{DA_1} = \frac{\overrightarrow{DA} - k\overrightarrow{DB}}{1-k} = \frac{1}{1-k} \vec{a} - \frac{k}{1-k} \vec{b}$$

$$\text{Tương tự: } \overrightarrow{DB_1} = \frac{1}{1-k} \vec{b} - \frac{k}{1-k} \vec{c}$$

Mặt khác từ  $\overrightarrow{C_1C} = k\overrightarrow{C_1D}$  ta có:

$$\overrightarrow{C_1D} + \overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{C_1D} \Rightarrow \overrightarrow{DC_1} = \frac{1}{1-k} \vec{c}.$$

$$\text{Tương tự } \overrightarrow{D_1D} = k\overrightarrow{D_1A} \text{ ta có: } \overrightarrow{D_1D} = \frac{k}{1-k} \vec{a}$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{DA_1} = -\frac{1}{k} \overrightarrow{DD_1} - k\overrightarrow{DB_1} - k^2\overrightarrow{DC_1}$$

Ta có các điểm  $A_1, B_1, C_1, D_1$  cùng thuộc một mặt phẳng và chỉ khi:

$$-\frac{1}{k} - k - k^2 = 1 \Leftrightarrow k^3 + k^2 + k + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (k+1)(k^2+1) = 0 \Leftrightarrow k = -1.$$

Vậy với  $k = -1$  thì các điểm  $A_1, B_1, C_1, D_1$  cùng thuộc một mặt phẳng.



**Ví dụ 15:** Cho M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và  $A_1D_1$  của hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Gọi P và Q là giao điểm của mặt phẳng (CMN) với các đường thẳng  $B_1C_1$  và  $DB_1$ . Biểu thị các vector  $\overrightarrow{AP}$  và  $\overrightarrow{AQ}$  theo các vector  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$ .

**Giải**

Vì bốn điểm M, N, C, P đồng phẳng nên tồn tại ba số thực x, y, z thỏa mãn:

$$x + y + z = 1 \quad (1)$$

và  $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{AN} + z\overrightarrow{AC}$ , hay:

$$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{x}{2} + z\right)\vec{a} + \left(\frac{y}{2} + z\right)\vec{b} + y\vec{c} \quad (2)$$

Mặt khác, nếu đặt:  $\overrightarrow{B_1P} = t\overrightarrow{B_1C_1}$  thì  $\overrightarrow{AP} = \vec{a} + t\vec{b} + \vec{c}$  (3)

Từ (1), (2), (3) và điều kiện  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  không đồng phẳng ta được hệ

$$\text{phương trình: } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{x}{2} + z = 1 \\ \frac{y}{2} + z = t \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 \\ t = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ Do đó: } \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b} + \vec{c}.$$

Giải tương tự:  $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{9}(4\vec{a} + 5\vec{b} + 4\vec{c})$ .

**Ví dụ 16:** Cho hình chóp tứ giác S.ABCD đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD theo thứ tự tại K, L, M, N.

Chứng minh rằng:  $\frac{SA}{SK} + \frac{SC}{SM} = \frac{SB}{SL} + \frac{SD}{SN}$ .

**Giải**

Gọi O là tâm hình bình hành đáy thì:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$$

Đặt:  $\overrightarrow{SA} = a\overrightarrow{SK}$ ,  $\overrightarrow{SB} = b\overrightarrow{SL}$ ,  $\overrightarrow{SC} = c\overrightarrow{SM}$ ,  $\overrightarrow{SD} = d\overrightarrow{SN}$ , với a, b, c, d > 1.

Khi đó:  $\frac{SA}{SK} + \frac{SC}{SM} = a + c$  và  $\frac{SB}{SL} + \frac{SD}{SN} = b + d$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{SN} = \frac{1}{d}\overrightarrow{SD} = \frac{1}{d}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = \frac{a}{d}\overrightarrow{SK} + \frac{c}{d}\overrightarrow{SM} - \frac{b}{d}\overrightarrow{SL}$$

Vì K, L, M, N đồng phẳng nên:

$$\frac{a}{d} + \frac{c}{d} - \frac{b}{d} = 1 \Rightarrow a + c = b + d \text{ (đpcm).}$$



#### DẠNG 4: SONG SONG, THẲNG HÀNG

- Để chứng minh ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng, ta chứng minh hai vector  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương, nghĩa là  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ , hoặc có thể chọn điểm O nào đó để chứng minh  $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$  với  $k + t = 1$ .

- Để chứng minh hai đường thẳng AB và CD song song hoặc trùng nhau, ta cần chứng minh hai vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$  cùng phương. Khi  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  cùng phương và có một điểm thuộc đường thẳng AB mà không thuộc đường thẳng CD hoặc ngược lại thì AB và CD là hai đường thẳng song song.

- Để chứng minh đường thẳng AB song song hoặc nằm trong mặt phẳng (P) ta chọn 2 điểm C, D thuộc (P) rồi chứng minh  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  cùng phương hoặc ta lấy trong (P) hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương, sau đó chứng minh  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  đồng phẳng. Khi các vector  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  đồng phẳng và có một điểm thuộc đường thẳng AB mà không thuộc (P) thì đường thẳng AB song song với mp(P).

Chú ý: - Đường thẳng AB qua M khi A, M, B thẳng hàng.

- Đường thẳng AB cắt CD tại I thì  $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IB}$ ,  $\overrightarrow{IC} = t\overrightarrow{ID}$

- Đường thẳng AB cắt mp(MNP) tại I thì A, I, B thẳng hàng và M, N, P, I đồng phẳng.

**Ví dụ 1:** Cho hai điểm phân biệt A, B và một điểm O bất kì. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để một điểm M nằm trên đường thẳng AB là  $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$  trong đó  $k + t = 1$ . Ngoài ra k và t không phụ thuộc điểm O. Với điều kiện nào của k, t thì điểm M thuộc đoạn thẳng AB? Điểm M là trung điểm của AB?

**Giải**

Điểm M nằm trên đường thẳng AB khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (1 - m)\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}$$

Đặt  $1 - m = k$ ,  $m = t$  thì ta được  $k + t = 1$  và  $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ .

Điểm M thuộc đoạn thẳng AB khi và chỉ khi  $0 \leq m \leq 1$ ,

vậy  $0 \leq k \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Vậy điều kiện của k và t là:  $k + t = 1$ ,  $k \geq 0$ ,  $t \geq 0$ .

Điểm M là trung điểm AB khi và chỉ khi  $m = \frac{1}{2}$  hay  $k = t = \frac{1}{2}$ .

**Ví dụ 2:** Cho tứ diện ABCD, M và N là các điểm lần lượt thuộc AB và CD sao cho  $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$ ,  $\overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$ . Các điểm I, J, K lần lượt thuộc AD, MN, BC sao cho  $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{ID}$ ,  $\overrightarrow{JM} = k\overrightarrow{JN}$ ,  $\overrightarrow{KB} = k\overrightarrow{KC}$ . Chứng minh rằng các điểm I, J, K thẳng hàng.



**Giải**

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MJ}$$

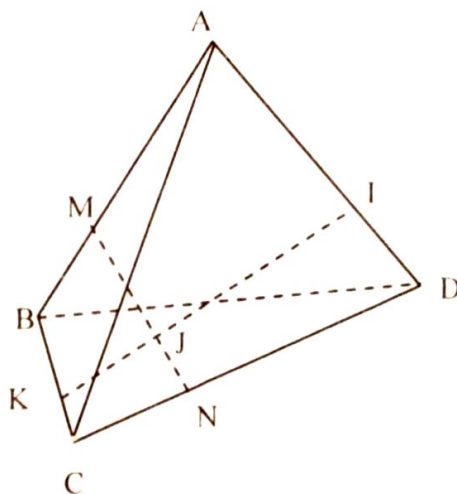
$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NJ}$$

$$\text{Ta có: } k\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{ID} + k\overrightarrow{DN} + k\overrightarrow{NJ}$$

$$\text{hay } k\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + k\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{MJ}$$

$$\text{Do đó: } (1-k)\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{DN}$$

$$\text{hay } \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AM} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{DN}$$



$$\text{Chứng minh tương tự như trên ta có: } \overrightarrow{IK} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{MB} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{NC}$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$$

$$\text{nên } \overrightarrow{IJ} = \frac{2}{1-k}\overrightarrow{MB} - \frac{2k}{1-k}\overrightarrow{NC}$$

Từ đó ta có:  $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{JK}$ . Vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.

**Ví dụ 3:** Cho ba mặt phẳng song song  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$  và hai đường thẳng chéo nhau  $d$ ,  $d_1$  cắt chúng theo thứ tự tại A, B, C và  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Từ một điểm O bất kì trong không gian dựng các vector  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AA_1}$ ,  $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{BB_1}$ ,  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{CC_1}$ . Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

**Giải**

Vì  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$  song song với nhau, hai đường thẳng  $d$ ,  $d_1$  cắt chúng lần lượt tại A, B, C và  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  nên theo định lý Ta-lét thì B chia AC,  $B_1$  chia  $A_1C_1$  theo cùng tỉ số nên:

$$\overrightarrow{BA} = k\overrightarrow{BC} \text{ và } \overrightarrow{B_1A_1} = k\overrightarrow{B_1C_1}$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{OB} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OC}}{1-k}$$

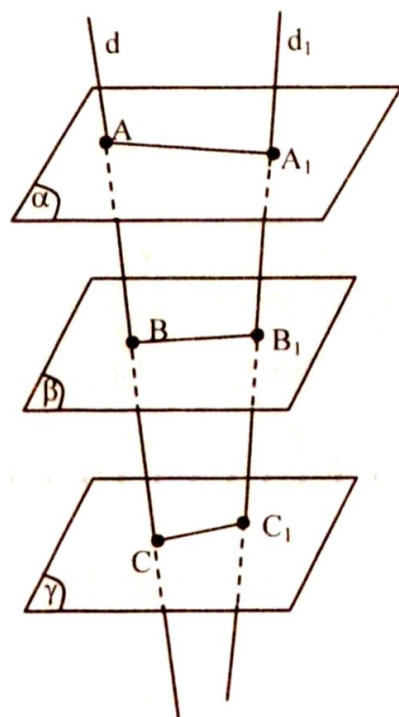
$$\text{Vì } \overrightarrow{OB_1} = \frac{\overrightarrow{OA_1} - k\overrightarrow{OC_1}}{1-k} \text{ nên:}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BB_1} &= \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA}) - k(\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OC})}{1-k} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AA_1} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{CC_1}$$

$$\text{Hay là: } \overrightarrow{ON} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{OM} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{OP}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{NM} = k\overrightarrow{NP} \text{ nên M, N, O thẳng hàng.}$$



ABC



**Ví dụ 4:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có các cạnh bằng  $m$ , các góc tại  $A$  bằng  $60^\circ$  ( $\widehat{BAD} = \widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = 60^\circ$ ). Gọi  $P$  và  $Q$  là các điểm xác định bởi  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{D'A}$ ,  $\overrightarrow{C'Q} = \overrightarrow{DC'}$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $PQ$  đi qua trung điểm của cạnh  $BB'$ . Tính độ dài đoạn  $PQ$ .

**Giải**

Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$

Ta có:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}m^2$

Gọi  $M$  là trung điểm của  $BB'$  thì:

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}$$

Do  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{D'A} = -\vec{a} - \vec{c}$

$$\begin{aligned} \text{nên } \overrightarrow{MP} &= -\frac{\vec{a}}{2} - \vec{b} - \vec{a} - \vec{c} \\ &= -\frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } \overrightarrow{MQ} &= \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'Q} = \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DC'} \\ &= \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \text{ nên } \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \vec{0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow M$  trung điểm  $PQ$  (đpcm)

$$\begin{aligned} \text{Ta có } PQ^2 &= \overrightarrow{PQ}^2 = 4\overrightarrow{MP}^2 \\ &= 4\left(\frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 = 4\left(\frac{9}{4}\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} + 3\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \\ &= 4\left(\frac{9}{4}m^2 + m^2 + m^2 + \frac{3}{2}m^2 + \frac{3}{2}m^2 + m^2\right) \\ &= 4 \cdot \frac{33}{4}m^2 = 33m^2 \Rightarrow PQ = m\sqrt{33}. \end{aligned}$$

Cách khác: Chiều theo phương song song với  $BB'$  lên mặt đáy ( $A'B'C'D'$ ).

**Ví dụ 5:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Một đường thẳng  $\Delta$  cắt các đường thẳng  $AA'$ ,  $BC$ ,  $C'D'$  lần lượt tại  $M$ ,  $N$ ,  $P$  sao cho  $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$ . Tính  $\frac{MA}{MA'}$ .

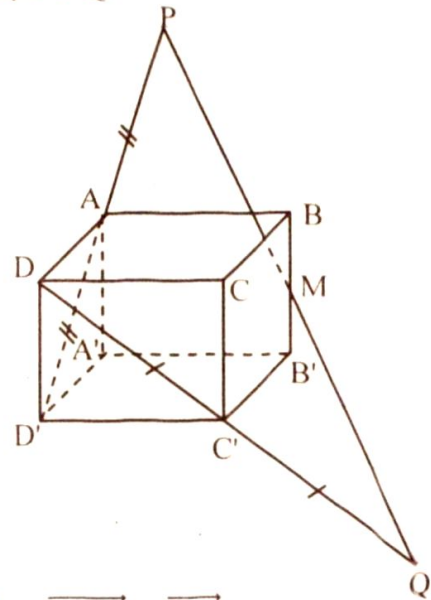
**Giải**

Chọn cơ sở  $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ .

Vì  $M$  thuộc đường thẳng  $AA'$  nên:  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AA'} = k\vec{c}$ ;

$N$  là điểm thuộc đường thẳng  $BC$  nên:  $\overrightarrow{BN} = t\vec{a}$

$P$  là điểm thuộc đường thẳng  $C'D'$  nên  $\overrightarrow{C'P} = m\vec{b}$





Với  $k, t, m$  là những số thực, ta có:

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -t\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NP} &= \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'P} \\ &= -t\vec{a} + \vec{c} + \vec{a} + m\vec{b} = (1-t)\vec{a} + m\vec{b} + \vec{c}.\end{aligned}$$

$$\text{Do } \overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP} \text{ nên ta có: } \begin{cases} -t = 2(1-t) \\ -1 = 2m \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 2, m = -\frac{1}{2}, t = 2.$$

$$\text{Vậy } \frac{MA}{MA'} = 2.$$

**Ví dụ 6:** Cho  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, CD$  của tứ diện  $ABCD$ ,  $P$  là điểm chia cạnh  $AD$  theo tỷ số  $-2$ . Hãy xác định điểm  $Q$  trên cạnh  $BC$  sao cho  $PQ$  và  $MN$  cắt nhau. Khi đó điểm  $Q$  chia cạnh  $BC$  theo tỷ số nào?

**Giải**

Vì  $MN$  luôn cắt  $mp(PBC)$  nên  $MN$  không song song  $PQ$ .

Vậy các đường thẳng  $MN$  và  $PQ$  cắt nhau hay điểm  $M, N, P, Q$  đồng phẳng nên tồn tại  $x, y$  sao cho  $\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MQ}$ .

Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{d}$  và

$$\overrightarrow{BQ} = t\overrightarrow{BC} = -t\vec{b} + t\vec{c}.$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d}$$

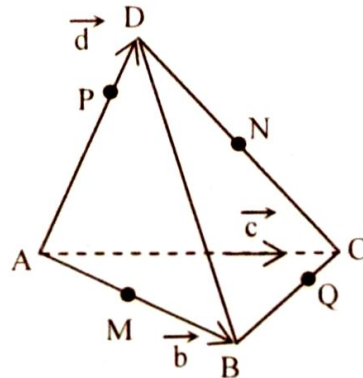
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\vec{b} - t\vec{b} + t\vec{c} = \left(\frac{1}{2} - t\right)\vec{b} + t\vec{c}.$$

$$\text{Do đó: } -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d} = \left(-\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - yt\right)\vec{b} + \left(\frac{x}{2} + yt\right)\vec{c} + \frac{x}{2}\vec{d}$$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - yt = -\frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} + yt = 0 \\ \frac{x}{2} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ yt = -\frac{2}{3} \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = 1 \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy  $\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$  nên điểm  $Q$  chia cạnh  $BC$  theo tỷ số  $-2$ .





**Ví dụ 7:** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Lấy các điểm  $A_1, B_1, C_1$  lần lượt thuộc các cạnh bên  $AA', BB', CC'$  sao cho  $\frac{AA_1}{AA'} = \frac{B'B_1}{BB'} = \frac{C'C_1}{CC'} = \frac{3}{4}$ . Trên các đoạn thẳng  $CA_1$  và  $A'B_1$  lần lượt lấy các điểm  $I, J$  sao cho  $IJ \parallel B'C_1$ . Tính tỉ số  $\frac{IJ}{B'C_1}$ .

**Giải**

Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ .

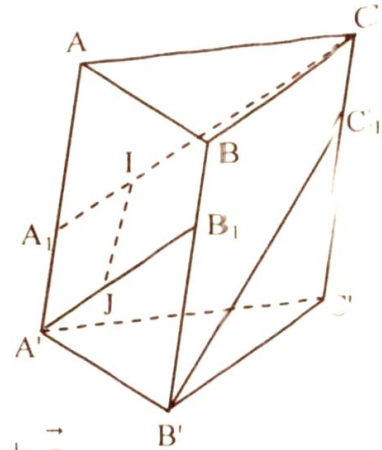
Theo giả thiết, ta có:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{3}{4} \vec{a}, \quad \overrightarrow{B'B_1} = -\frac{3}{4} \vec{a}, \quad \overrightarrow{C'C_1} = -\frac{3}{4} \vec{a}$$

Ta có:  $\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1} = \frac{3}{4} \vec{a} - \vec{c}$

$$\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{B'B_1} = -\frac{3}{4} \vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{B'C_1} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'C_1} = -\frac{3}{4} \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$



Vì  $I$  thuộc  $CA_1$  nên  $\overrightarrow{CI} = t\overrightarrow{CA_1} = \frac{3}{4}t\vec{a} - t\vec{c}$

Do  $J$  thuộc  $A'B_1$  nên  $\overrightarrow{A'J} = m\overrightarrow{A'B_1} = -\frac{3}{4}m\vec{a} + m\vec{b}$

Mặt khác  $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{A'J}$

$$= -\frac{3}{4}t\vec{a} + t\vec{c} + \vec{a} - \vec{c} - \frac{3}{4}m\vec{a} + m\vec{b}$$

$$= \left(1 - \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}m\right)\vec{a} + m\vec{b} + (t-1)\vec{c}$$

Ta có  $IJ \parallel B'C_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{B'C_1} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}m = -\frac{3}{4}k \\ m = -k \\ t - 1 = k \end{cases}$

Suy ra:  $1 - \frac{3}{4}(k+1) + \frac{3}{4}k = -\frac{3}{4}k$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{4}k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3} \Rightarrow t = \frac{2}{3}, m = \frac{1}{3}.$$

Vậy điểm  $I$  thuộc  $A_1C$  được xác định bởi  $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA_1}$ .

và  $J$  thuộc  $A'B_1$  được xác định bởi  $\overrightarrow{A'J} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'B_1}$ .



Khi đó, ta có  $\frac{IJ}{B'C_1} = \frac{1}{3}$ .

**Ví dụ 8:** Cho M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD của tứ diện ABCD; P là điểm thuộc đường thẳng AD sao cho  $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}$ , k là số cho trước ( $k \neq 1$ ). Xác định điểm Q thuộc đường thẳng BC sao cho PQ và MN cắt nhau. Khi đó, hãy tính tỉ số  $\frac{QB}{QC}$ .

**Giải**

MN cắt PQ nên các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng. Điều này tương đương với có các số x, y sao cho:

$$\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MQ}$$

Đặt  $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$ .

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

$$= \frac{1}{2}(-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{MP} = \frac{\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MD}}{1 - k}$$

$$= \frac{1}{1 - k} \left[ \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) - \frac{k}{2}(\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{a}) \right] = \frac{1}{1 - k} \left[ \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) + \frac{k}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \right]$$

$$= \frac{1}{2(1 - k)} \left[ (1 + k)\vec{a} + (k - 1)\vec{b} \right] = \frac{k + 1}{2(1 - k)}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{MB} + t\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) + t(-\vec{b} + \vec{c}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \left(\frac{1}{2} - t\right)\vec{b} + t\vec{c}$$

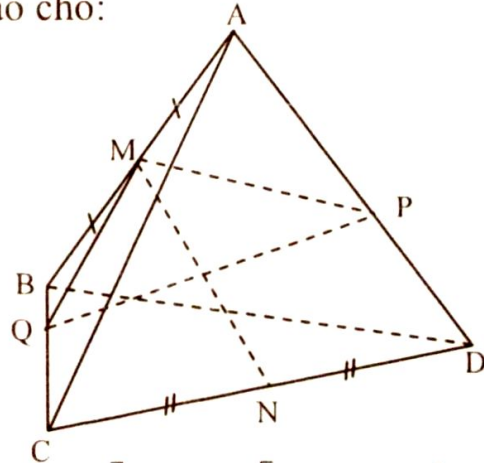
Từ đó ta có:  $\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MQ}$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} \frac{k + 1}{2(1 - k)} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x + y\left(\frac{1}{2} - t\right) \\ 0 = \frac{1}{2}x + yt \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -1, x = \frac{k + 1}{k - 1} + 1 = \frac{2k}{k - 1}, t = \frac{k}{k - 1}.$$

$$\text{Nên } \overrightarrow{BQ} = \frac{k}{k - 1}\overrightarrow{BC} = \frac{k}{k - 1}(\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QC}).$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{k}{k - 1}\right)\overrightarrow{BQ} = \frac{k}{k - 1}\overrightarrow{QC} \Leftrightarrow -\overrightarrow{BQ} = k\overrightarrow{QC}. \text{ Vậy } \frac{QB}{QC} = |k|.$$





**Ví dụ 9:** Cho một hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Một mặt phẳng đi qua  $D_1$  song song với  $DA_1$  và  $AB_1$  cắt đường thẳng  $BC_1$  tại  $M$ . Tìm tỉ số mà điểm  $M$  chia đoạn thẳng  $BC_1$ .

**Giải**

Giả sử  $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC_1}$ . Ta phải xác định  $k$  sao cho ba vector  $\overrightarrow{DA_1}$ ,  $\overrightarrow{AB_1}$  và  $\overrightarrow{D_1M}$  đồng phẳng.

Đặt  $\overrightarrow{D_1A_1} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{D_1C_1} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{D_1D} = \vec{c}$

Ta có:  $\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{D_1A_1} - \overrightarrow{D_1D} = \vec{a} - \vec{c}$

$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{DC_1} = \vec{b} - \vec{c}$

$$\overrightarrow{D_1M} = \frac{\overrightarrow{D_1B} - k\overrightarrow{D_1C_1}}{1-k} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - k\vec{b}}{1-k}$$

Điều kiện ba vector  $\overrightarrow{D_1M}$ ,  $\overrightarrow{DA_1}$ ,  $\overrightarrow{AB_1}$  đồng phẳng ta phải có  $m, n$ :

$$\overrightarrow{D_1M} = m\overrightarrow{DA_1} + n\overrightarrow{AB_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\vec{a} + (1-k)\vec{b} + \vec{c}}{1-k} = m(\vec{a} - \vec{c}) + n(\vec{b} - \vec{c}) = m\vec{a} + n\vec{b} - (m+n)\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{1-k} = m \\ 1 = n \\ \frac{1}{1-k} = -(m+n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ m = -\frac{1}{2} \\ k = 3 \end{cases} \quad \text{Vậy } k = 3.$$

**Ví dụ 10:** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $G$  và  $G'$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$ ,  $I$  là giao điểm của  $AB'$  và  $A'B$ . Chứng minh rằng  $GI \parallel CG'$

**Giải:**

Chọn cơ sở gốc  $A$ :

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{c}$$

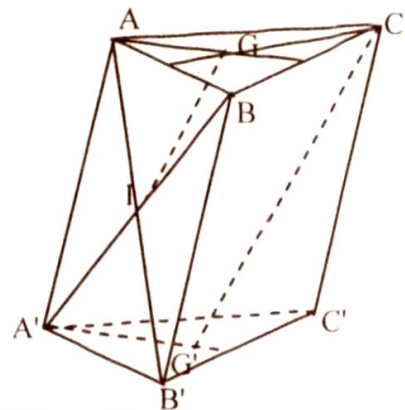
$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AG} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3}, \quad \overrightarrow{AI} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

$$\overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'} = \vec{a} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$$\text{nên } \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AG} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3} = \frac{3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}}{6}$$

$$\overrightarrow{CG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3} - \vec{c} = \frac{3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}}{3}$$

Suy ra:  $\overrightarrow{CG'} = 2\overrightarrow{GI}$  mà  $GI, CG'$  phân biệt nên  $GI \parallel CG'$





**Ví dụ 11:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Xét các điểm M và N lần lượt thuộc các đường thẳng  $A'C$  và  $C'D$  sao cho  $\overrightarrow{MA'} = k\overrightarrow{MC}$ ,  $\overrightarrow{NC'} = t\overrightarrow{ND}$  ( $k$  và  $t$  đều khác 1). Đặt  $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ . Xác định các số  $k$ ,  $t$  để đường thẳng MN song song với đường thẳng  $BD'$ .

**Giải**

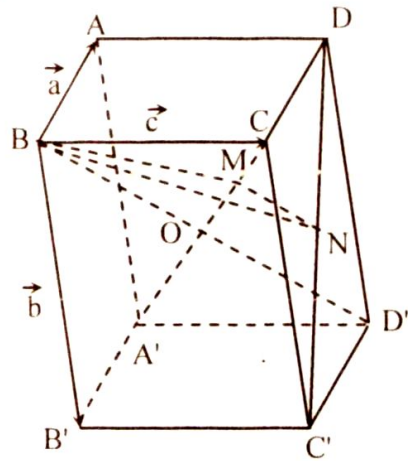
Từ giả thiết ta có:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{\overrightarrow{BA'} - k\overrightarrow{BC}}{1 - k}, \text{ do đó:}$$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{1 - k}\vec{a} + \frac{1}{1 - k}\vec{b} - \frac{k}{1 - k}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BC'} - t\overrightarrow{BD}}{1 - t}, \text{ do đó:}$$

$$\overrightarrow{BN} = -\frac{t}{1 - t}\vec{a} + \frac{1}{1 - t}\vec{b} + \vec{c}$$



Vì  $BD'$  và  $C'D$  là hai đường thẳng chéo nhau và N thuộc đường thẳng  $C'D$  nên đường thẳng MN không thể trùng với đường thẳng  $BD'$ .

Vậy đường thẳng MN song song với đường thẳng  $BD'$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{MN} = p\overrightarrow{BD'}$ .

Do  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM}$  nên ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{t}{1 - t} - \frac{1}{1 - k}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{1 - t} - \frac{1}{1 - k}\right)\vec{b} + \left(1 + \frac{k}{1 - k}\right)\vec{c}$$

Mặt khác  $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  mà  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  là ba vector không đồng phẳng

$$\text{nên: } \overrightarrow{MN} = p\overrightarrow{BD'} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{t}{1 - t} - \frac{1}{1 - k} = p \\ \frac{1}{1 - t} - \frac{1}{1 - k} = p \\ 1 + \frac{k}{1 - k} = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ k = -3 \\ p = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy khi  $k = -3$ ,  $t = -1$  thì đường thẳng MN và đường thẳng  $BD'$  song song với nhau.

**Ví dụ 12:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Các điểm M, N lần lượt thuộc các đường thẳng  $CA$  và  $DC'$  sao cho  $\overrightarrow{MC} = m\overrightarrow{MA}$ ,  $\overrightarrow{ND} = n\overrightarrow{NC'}$ . Xác định  $m$  để các đường thẳng MN và  $BD'$  song song với nhau. Khi ấy, tính MN biết  $\widehat{ABC} = \widehat{ABB'} = \widehat{CBB'} = 60^\circ$  và  $BA = a$ ,  $BB' = b$ ,  $BC = c$ .

**Giải**

Đặt  $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$  thì  $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Do  $\overrightarrow{MC} = m\overrightarrow{MA}$  nên

ABC



$$\overrightarrow{BM} = \frac{\overrightarrow{BC} - m\overrightarrow{BA}}{1 - m} = \frac{\vec{c} - m\vec{a}}{1 - m}$$

Tương tự ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BN} &= \frac{\overrightarrow{BD} - m\overrightarrow{BC'}}{1 - m} = \frac{\vec{a} + \vec{c} - m(\vec{b} + \vec{c})}{1 - m} \\ &= \frac{1}{1 - m}\vec{a} - \frac{m}{1 - m}\vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

$$\text{Từ đó } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \frac{1 + m}{1 - m}\vec{a} - \frac{m}{1 - m}\vec{b} - \frac{m}{1 - m}\vec{c}$$

Do AC, BD' chéo nhau và DC', BD' chéo nhau nên

$$MN \parallel BD' \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}.$$

Mặt khác  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng nên điều ấy xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{1 + m}{1 - m} = k \\ \frac{-m}{1 - m} = k \\ \frac{-m}{1 - m} = k \end{cases} \text{ Suy ra } 1 + m = -m \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Từ đó, ta có  $k = \frac{1}{3}$ . Vậy  $m = -\frac{1}{2}$  thì  $MN \parallel BD'$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{9}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c})$$

$$\text{hay } MN^2 = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)$$

$$\text{Vậy } MN = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}.$$

**Ví dụ 13:** Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và DD'; G và G' lần lượt là trọng tâm của các tứ diện A'D'MN và BCC'D'. Chứng minh rằng đường thẳng GG' và mặt phẳng (ABB'A') song song với nhau.

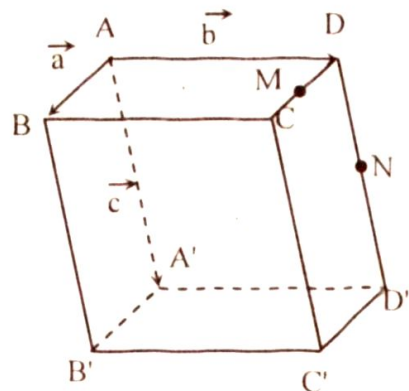
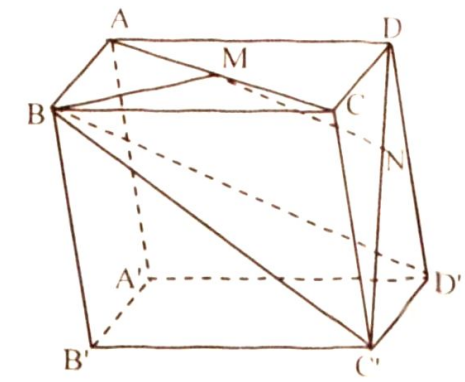
**Giải**

$$\text{Đặt } \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}.$$

Vì G' là trọng tâm của tứ diện BCC'D' nên:

$$\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'})$$

và G là trọng tâm của tứ diện A'D'MN nên:





$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó: } \overrightarrow{GG'} &= \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{D'C} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{ND'}) \\ &= \frac{1}{4} (\vec{a} - \vec{c} + \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2} \vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2} \vec{c}) = \frac{1}{8} (5\vec{a} - \vec{c}) \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AA'}$ ,  $\overrightarrow{GG'}$  đồng phẳng. Mặt khác, G không thuộc mặt phẳng  $(ABB'A')$  nên đường thẳng  $GG'$  và mặt phẳng  $(ABB'A')$  song song với nhau.

**Ví dụ 14:** Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Điểm M chia đoạn AD theo tỉ số  $-\frac{1}{4}$ , điểm N chia đoạn  $A_1C$  theo tỉ số  $-\frac{2}{3}$ . Chứng minh MN song song mp( $BC_1D$ ).

**Giải**

Đặt  $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BB_1} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$

Khi đó:

$$\overrightarrow{BD} = \vec{a} + \vec{c}; \overrightarrow{BC_1} = \vec{b} + \vec{c},$$

$$\overrightarrow{BA_1} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}}{5} = \frac{5\vec{a} + \vec{c}}{5}$$

$$\overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BA_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3\overrightarrow{BA_1} + 2\overrightarrow{BC}}{5} = \frac{3\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}}{5}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \frac{-2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}}{5}$$

Để chứng minh  $MN \parallel \text{mp}(BDC_1)$  ta phải chứng minh ba vector  $\overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{BD}$  và  $\overrightarrow{BC_1}$  đồng phẳng, tức là có m và n sao cho:

$$\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{BD} + n\overrightarrow{BC_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}}{5} = m(\vec{a} + \vec{c}) + n(\vec{b} + \vec{c}) = m\vec{a} + n\vec{b} + (m+n)\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow n = -\frac{2}{5} \text{ và } n = \frac{3}{5} \text{ (đpcm).}$$

**Ví dụ 15:** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có độ dài cạnh bên bằng a.

Trên các cạnh bên  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  ta lấy tương ứng các điểm M, N, P sao cho  $AM + BN + CP = a$ . Chứng minh rằng mặt phẳng  $(MNP)$  luôn luôn đi qua một điểm cố định.



### Giải

Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác MNP.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'M}$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'N}$$

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'P}$$

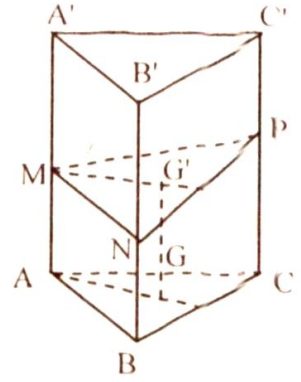
$$\text{Nên } \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{GG'}$$

Vì lăng trụ có cạnh bên bằng a và  $AM + BN + CP = a$

$$\text{nên } \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AA'} \text{ do đó } \overrightarrow{AA'} = 3\overrightarrow{GG'}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AA'}. \text{ Vì G, A, A' cố định nên G' cố định.}$$

Vậy (MNP) luôn đi qua G' cố định.



**Ví dụ 16:** Cho hai tia Ax và By chéo nhau. Trên Ax và By lần lượt lấy hai điểm M, N thay đổi sao cho  $AM = kBN$ , k là một số dương không đổi. Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng MN nằm trên một tia cố định.

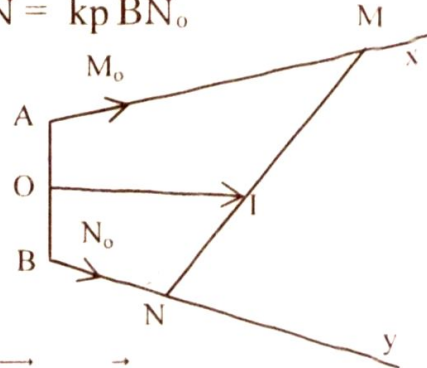
### Giải

Gọi O là trung điểm đoạn thẳng AB và I là trung điểm đoạn thẳng MN.

Ta lấy hai vector đơn vị  $\overrightarrow{AM_0}$  và  $\overrightarrow{BN_0}$  lần lượt nằm trên tia Ax và By.

Vì  $AM = kBN$  nên, nếu  $\overrightarrow{AM} = p\overrightarrow{AM_0}$  thì  $\overrightarrow{BN} = kp\overrightarrow{BN_0}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}) \\ &= \frac{1}{2}(p\overrightarrow{AM_0} + kp\overrightarrow{BN_0}) \\ &= \frac{p}{2}(\overrightarrow{AM_0} + k\overrightarrow{BN_0}) \end{aligned}$$



Đặt  $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM_0} + k\overrightarrow{BN_0}) = \vec{e}$  ta luôn luôn có  $\overrightarrow{OI} = p\vec{e}$ .

Suy ra I luôn luôn nằm trên một tia cố định.

**Ví dụ 17:** Trên các cạnh AB, AC và AD của tứ diện ABCD lần lượt lấy các điểm K, L và M sao cho:

$$\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AC} = \beta \overrightarrow{AL} \text{ và } \overrightarrow{AD} = \gamma \overrightarrow{AM}$$

- Chứng minh rằng nếu  $\gamma = \alpha + \beta + 1$  thì các mặt phẳng (KLM) luôn đi qua một điểm cố định.
- Chứng minh rằng nếu  $\beta = \alpha + 1$  và  $\gamma = \beta + 1$  thì các mặt phẳng (KLM) luôn đi qua một đường thẳng cố định.

### Giải

Đặt:  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ . Vì ba vector  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  không đồng phẳng, nên với điểm X bất kì trong không gian ta có:

$$\overrightarrow{AX} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$



$$\text{Điểm } X \text{ thuộc mp(KLM)} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AX} = p\overrightarrow{AK} + q\overrightarrow{AL} + r\overrightarrow{AM} \\ p + q + r = 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AX} = \alpha x \overrightarrow{AK} + \beta y \overrightarrow{AL} + \gamma z \overrightarrow{AM}$$

a) Giả sử:  $\gamma = \alpha + \beta + 1$ , thì:

$$\overrightarrow{AX} = \alpha x \overrightarrow{AK} + \beta y \overrightarrow{AL} + (\alpha + \beta + 1)z \overrightarrow{AM}$$

Do đó để  $X \in \text{mp(KLM)}$  ta cần có điều kiện:

$$\alpha x + \beta y + (\alpha + \beta + 1)z = 1$$

$$\text{hay: } (x + z)\alpha + (y + z)\beta + z = 1 \quad (*)$$

Điều kiện (\*) đúng với mọi  $\alpha, \beta$  khi và chỉ khi:  $x = y = -1, z = 1$ .

Vậy điểm X sao cho  $\overrightarrow{AX} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$  là điểm cố định nằm trên mọi mp(KLM).

b) Giả sử:  $\beta = \alpha + 1, \gamma = \beta + 1$  hay  $\alpha = \beta - 1, \gamma = \beta + 1$  thì:

$$\overrightarrow{AX} = (\beta - 1)x \overrightarrow{AK} + \beta y \overrightarrow{AL} + (\beta + 1)z \overrightarrow{AM}.$$

Để  $X \in \text{mp(KLM)}$  ta cần có điều kiện:

$$(\beta - 1)x + \beta y + (\beta + 1)z = 1 \Rightarrow (x + y + z)\beta - x + z = 1 \quad (**).$$

Điều kiện (\*\*) đúng với mọi  $\beta$  khi và chỉ khi:  $x + y + z = 0$  và  $-x + z = 1$  hay  $z = x + 1$  và  $y = -2x - 1$ .

Vì vậy, ta có thể lấy điểm X ứng với  $x = 0, y = -1, z = 1$  và Y ứng với:

$x = 1, y = -3, z = 2$  chẳng hạn, tức là:  $\overrightarrow{AX} = -\vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{AY} = \vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$  thì X, Y là hai điểm cố định thuộc mọi mp(KLM).

Vậy mp(KLM) luôn đi qua đường thẳng cố định XY.

### C. BÀI LUYỆN TẬP

1. Tứ diện ABCD có trọng tâm G. Gọi M, N trung điểm AC, BD. Chứng minh:

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{MN}$

b)  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PG}, \forall P.$

**HD:** a) chèn 2 trung điểm M và N                      b) chèn trọng tâm G

2. Cho lăng trụ ABC.A'B'C'. Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}; \overrightarrow{AB} = \vec{b}; \overrightarrow{AC} = \vec{c}.$

a) Biểu diễn  $\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{AC'}$

b) Gọi G trọng tâm tam giác ABC. Biểu diễn  $\overrightarrow{A'G}.$

**HD:** đưa về gốc A.

3. Chứng minh hai tứ diện ABCD và A'B'C'D' cùng trọng tâm khi và chỉ khi:  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}.$

4. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{x}, \overrightarrow{AD} = \vec{y}, \overrightarrow{AA'} = \vec{z}$

a) Gọi G trọng tâm tam giác BDA'. Biểu diễn  $\overrightarrow{AG}.$

b) Chứng minh 3 điểm A, G, C' thẳng hàng.

**HD:** b) dùng quy tắc hình hộp



5. Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $D_1, D_2, D_3$  là điểm đối xứng của  $D'$  qua  $A, B', C$ . Chứng minh  $B$  là trọng tâm của tứ diện  $D_1D_2D_3D'$ .

**HD:** dùng hệ thức vector của trọng tâm

6. Tam giác  $ABC$  trọng tâm  $G$ . Điểm  $M$  bất kỳ trong không gian.  
 a) Chứng minh:  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ .  
 b) Tìm  $M$  sao cho  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  bé nhất.

**ĐS:** b)  $M$  là trọng tâm  $G$

7. Cho tứ diện  $ABCD$  và đường thẳng  $d$ .

- a) Tìm  $H \in d$  để  $|\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD}|$  bé nhất  
 b) Tìm  $M \in d$  để  $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}|$  bé nhất.

**HD:** b) Gọi  $I$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{ID} = \vec{0}$

8. Cho tam giác  $ABC$ . Tìm GTNN của :

$$T = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$$

9. Tứ diện đều  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $M$  trung điểm  $CD$ .

Tính góc  $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}$ .

**ĐS:**  $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

10. Cho tứ diện  $ABCD$  có tất cả các cạnh bằng  $x$ . Gọi  $M, N$  là trung điểm của  $AB, CD$ .

- a) Tính đoạn  $MN$  và chứng minh  $MN$  vuông góc  $CD$ .  
 b) Tính góc giữa  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$

11. Cho tứ diện  $OABC$  có 3 cạnh  $OA, OB, OC$  đôi một hợp nhau 3 góc  $\alpha, \beta, \gamma$ . Chứng minh  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > -3/2$ .

**HD:** dùng bình phương vô hướng của tổng 3 vector đơn vị trên 3 cạnh  $OA, OB, OC$ .

12. Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Chứng minh hình hộp là hình lập phương khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}| &= |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'}| \\ &= |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'}| = |-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'}| \end{aligned}$$

**HD:** dùng bình phương vô hướng

13. Tứ diện  $ABCD$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$ :

- a)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k \overrightarrow{MC}$       b)  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$

**ĐS:** gọi  $I, J$  là trung điểm của  $AB, CD$

- a) đường thẳng  $IC$   
 b) mặt phẳng trung trực của  $IJ$ .

14. Giả sử  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng.

Các vector  $\vec{a} - 2\vec{b}, 3\vec{b} - \vec{c}, 2\vec{c} - 3\vec{a}$  có đồng phẳng không?

**ĐS:** đồng phẳng



15. Cho tứ diện ABCD và M, N sao cho:  $\overrightarrow{MA} = -4\overrightarrow{MB}$ ;  $\overrightarrow{ND} = -4\overrightarrow{NC}$ .

Ba điểm I, J, K lần lượt chia đoạn AD, MN, BC cùng theo tỉ số k.  
Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

16. Cho tứ diện ABCD. Lấy M, N, P, Q trên AB, BC, CD, DA sao cho

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DC}.$$

Tìm k để P, Q, M, N đồng phẳng.

**ĐS:**  $k = \frac{1}{2}$

17. Tứ diện ABCD. Các điểm A', B', C', D' chia đoạn AB, BC, CD, DA cùng tỉ số k.

a) Chứng minh tồn tại điểm O để:  $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

b) Tìm k để A', B', C', D' đồng phẳng.

**ĐS:** b)  $k = -1$

18. Trên cạnh AB, BC, CD, DA của tứ diện ABCD lấy A', B', C', D' sao cho:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'}$  với M nào đó.

Chứng minh:  $\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{A'B}} = \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{B'C}} = \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{C'D}} = \frac{\overrightarrow{DD'}}{\overrightarrow{D'A}}$

19. Cho hình chóp S.ABC. Lấy A', B', C' trên SA, SB, SC sao cho

$SA = 3SA'$ ,  $SB = 5SB'$ ,  $SC = cSC'$ . Chứng minh (A'B'C') đi qua trọng tâm G tam giác ABC khi và chỉ khi  $c = 5$ .

**HD:** dùng điều kiện đồng phẳng

20. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N là trung điểm AB, A'D'.

a) Xác định giao điểm P, Q của đường thẳng B'C', DB' với (CMN).

b) Tính  $\overrightarrow{AP}$ ,  $\overrightarrow{AQ}$  theo  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ;  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ;  $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ .

21. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Lấy A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> trên AA', BB', CC' sao

cho  $\frac{AA_1}{AA'} = \frac{B'B_1}{BB'} = \frac{C'C_1}{CC'} = \frac{3}{4}$ . Lấy I, J trên CA<sub>1</sub>, A'B<sub>1</sub> sao cho IJ song

song B'C<sub>1</sub>. Tính tỉ số IJ / B'C.

**ĐS:**  $IJ / B'C = 1/3$



## §2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Góc giữa hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  là góc giữa hai đường thẳng  $\Delta'_1$  và  $\Delta'_2$  cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ .
- Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng  $90^\circ$ . Ký hiệu  $a \perp b$ .

### B. PHÂN DẠNG TOÁN

#### DẠNG 1: CHỨNG MINH VUÔNG GÓC

- Để chứng minh hai đường thẳng AB và CD vuông góc ta chứng minh  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$  hay  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$ .
- Nếu  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  lần lượt là các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì  $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .
- Nếu  $a \parallel b$  và c vuông góc với một trong hai đường thẳng đó thì c vuông góc với đường thẳng còn lại.

**Ví dụ 1:** Cho hình tứ diện ABCD. Chứng minh rằng nếu

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$  thì  $AB \perp CD$ ,  $AC \perp BD$ ,  $AD \perp BC$ . Điều ngược lại có đúng không?

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD. \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự, } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow AD \perp BC;$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow AB \perp CD.$$

Như vậy điều ngược lại cũng đúng.

**Ví dụ 2:** Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng AB vuông góc với CD khi và chỉ khi  $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ .

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } AC^2 + BD^2 &= AD^2 + BC^2 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AD}^2 &= \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BD}^2 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) &= (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}) \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})\overrightarrow{DC} &= (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})\overrightarrow{DC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) &= 0 \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC} \cdot (2\overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow AB \perp CD$$

**Ví dụ 3:** Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC và

$\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$ . Chứng minh rằng  $SA \perp BC$ ,  $SB \perp AC$ ,  $SC \perp AB$ .

**Giải**

Ta chứng minh  $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ .

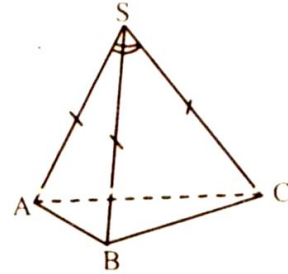
Thật vậy:  $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA} \cdot (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$

$$= SA \cdot SC \cos \widehat{ASC} - SA \cdot SB \cos \widehat{ASB}$$

Vì SA = SB = SC và  $\widehat{ASB} = \widehat{ASC}$

nên  $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  tức là  $SA \perp BC$ .

Tương tự ta có  $SB \perp AC$ ,  $SC \perp AB$ .



**Ví dụ 4:** Cho tứ diện ABCD có  $AB = AC = AD = a$  và  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ ,  $\widehat{BAD} = 60^\circ$

Chứng minh rằng :

a)  $AB \perp CD$ .

b) Nếu I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì  $IJ \perp AB$  và  $IJ \perp CD$ .

**Giải**

a) Ta có  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD})$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos \widehat{BAD} - |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \widehat{BAC}$$

Do  $AB = AC = AD$ ,  $\widehat{BAC} = \widehat{BAD}$  nên

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0, \text{ tức là } AB \perp CD$$

b) Vì I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB})$$

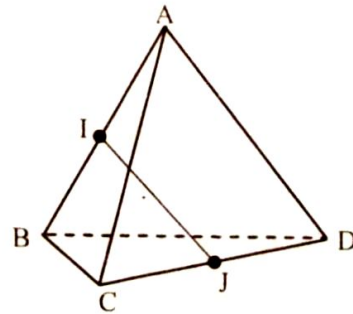
$$= \frac{1}{2} \left( |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos 60^\circ + |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ - \overrightarrow{AB}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 - a^2 \right) = 0 \Rightarrow AB \perp IJ$$

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2} \left( -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow CD \perp IJ$$



ABC



**Ví dụ 5:** Cho hình tứ diện ABCD, trong đó  $AB \perp AC$ ,  $AB \perp BD$ . Gọi P và Q là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB và CD sao cho  $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PB}$ ;  $\overrightarrow{QC} = k\overrightarrow{QD}$  ( $k \neq 1$ ). Chứng minh rằng AB và PQ vuông góc với nhau.

**Giải**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$$

$$\text{và } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ} \Rightarrow k\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{PB} + k\overrightarrow{BD} + k\overrightarrow{DQ} \text{ nên:}$$

$$(1 - k)\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} - k\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CQ} - k\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{BD}$$

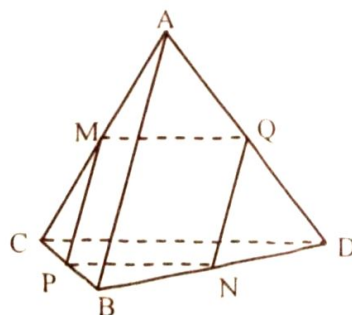
$$\text{Do đó } (1 - k)\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ (vì } AB \perp AC, AB \perp BD).$$

$$\text{Mà } k \neq 1 \text{ nên } \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow AB \perp PQ.$$

**Ví dụ 6:** Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn AC, BD, BC, AD. Chứng minh nếu  $MN = PQ$  thì  $AB \perp CD$ .

**Giải**

Ta có MP, QN là các đường trung bình của tam giác ACB, ADB nên có  $MP \parallel = QN$ , do đó MPNQ là hình bình hành. Mà  $MN = PQ$  nên có hai đường chéo bằng nhau, do đó MPNQ là hình chữ nhật, suy ra  $MP \perp MQ \Rightarrow AB \perp CD$ .



Cách khác: Chọn hệ cơ sở:  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ . Rồi chứng minh  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

**Ví dụ 7:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Trên các cạnh DC và BB' ta lần lượt lấy các điểm M và N sao cho  $DM = BN = x$  với  $0 \leq x \leq a$ . Chứng minh rằng hai đường thẳng AC' và MN vuông góc với nhau.

**Giải**

$$\text{Đặt } \overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}.$$

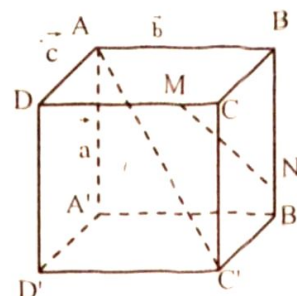
$$\text{thì } \overrightarrow{BN} = \frac{x}{a} \cdot \vec{a} \text{ và } \overrightarrow{DM} = \frac{x}{a} \cdot \vec{b}.$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM})$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MN} = \left( \vec{b} + \frac{x}{a} \vec{a} \right) - \left( \vec{c} + \frac{x}{a} \vec{b} \right) = \frac{x}{a} \vec{a} + \left( 1 - \frac{x}{a} \right) \vec{b} - \vec{c}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MN} &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \left[ \frac{x}{a} \vec{a} + \left( 1 - \frac{x}{a} \right) \vec{b} - \vec{c} \right] = \frac{x}{a} \vec{a}^2 + \left( 1 - \frac{x}{a} \right) \vec{b}^2 - \vec{c}^2 \\ &= x \cdot a + \left( 1 - \frac{x}{a} \right) a^2 - a^2 = 0 \Rightarrow AC' \perp MN. \end{aligned}$$





**Ví dụ 8:** Cho tứ diện ABCD, gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng nếu  $PQ \perp AB$  và  $PQ \perp CD$  thì  $AC = BD$  và  $AD = BC$ , ngược lại nếu  $AC = BD$  và  $AD = BC$  thì  $PQ \perp AB$  và  $PQ \perp CD$ .

**Giải**

Đặt  $\overrightarrow{DA} = \vec{a}, \overrightarrow{DB} = \vec{b}, \overrightarrow{DC} = \vec{c}$  thì

$$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}, \overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}, \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

và  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ}$

$$= \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2} - \vec{a} + \frac{\vec{c}}{2} = \frac{\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}}{2}$$

$$\text{Ta có } AC = BD \Leftrightarrow |\vec{c} - \vec{a}| = |\vec{b}| \Leftrightarrow (\vec{c} - \vec{a})^2 = \vec{b}^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{b}^2 - (\vec{c} - \vec{a})^2 = 0 \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot (-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$$

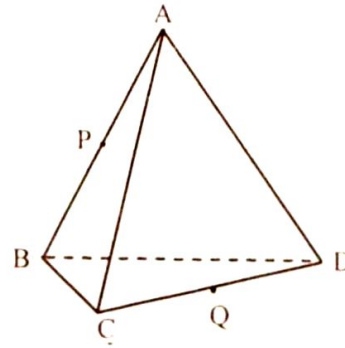
$$\text{Tương tự } AD = BC \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{c} - \vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}^2 = (\vec{c} - \vec{b})^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = 0$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} AC = BD \\ AD = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot (-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot [(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})] = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot [(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{c} = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} PQ \perp CD \\ PQ \perp AB \end{cases}$$



**Ví dụ 9:** Cho tứ diện đều ABCD có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Lấy các điểm I, J, K lần lượt thuộc các đường thẳng BC, AC, AD sao cho  $\overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{JA} = k\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{KA} = k\overrightarrow{KD}$  trong đó k là số cho trước.

a) Chứng minh rằng  $MN \perp IJ$  và  $MN \perp JK$ .

b) Chứng minh rằng  $AB \perp CD$ .

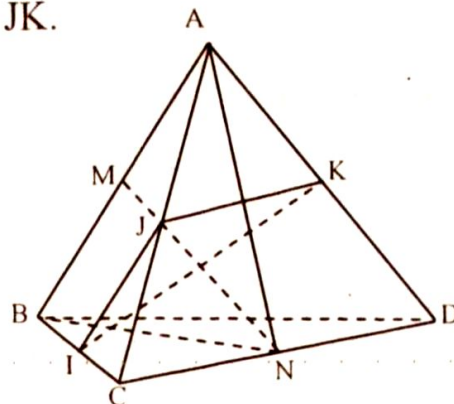
**Giải**

a) Từ  $\overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{JA} = k\overrightarrow{JC}$

Ta có  $IJ \parallel AB$ .

Tương tự, ta có  $JK \parallel CD$ .

Do các cạnh của tứ diện ABCD bằng nhau và N là trung điểm của CD nên  $NA = NB$ .





Mặt khác  $MA = MB$ .

Vậy  $MN \perp AB$ , từ đó  $MN \perp IJ$ .

Tương tự như trên, ta có  $MN \perp CD$  và  $JK \parallel CD$  nên  $MN \perp JK$ .

b) Ta có  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB}$

Từ giả thiết, ta có:  $AN \perp CD$  nên  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

và  $BN \perp CD$  nên  $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

Vậy  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB}) \cdot \overrightarrow{CD} = 0$  nên  $AB \perp CD$ .

**Ví dụ 10:** Cho vector  $\vec{n}$  khác  $\vec{0}$  và hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  không cùng phương. Chứng minh rằng nếu vector  $\vec{n}$  vuông góc với cả hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  thì ba vector  $\vec{n}, \vec{a}, \vec{b}$  không đồng phẳng.

**Giải**

Giả sử  $\vec{n}, \vec{a}, \vec{b}$  đồng phẳng, vì  $\vec{a}, \vec{b}$  không cùng phương nên ta có  $\vec{n} = x\vec{a} + y\vec{b}$ , từ đó  $\vec{n} \cdot \vec{n} = (x\vec{a} + y\vec{b}) \cdot \vec{n} = x\vec{a} \cdot \vec{n} + y\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$ , điều này mâu thuẫn với  $\vec{n} \neq \vec{0}$ .

Vậy  $\vec{n}, \vec{a}, \vec{b}$  không đồng phẳng.

**Ví dụ 11:** Chứng minh rằng ba vector cùng vuông góc với vector  $\vec{n} \neq \vec{0}$  thì đồng phẳng. Từ đó suy ra các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì cùng song song với một mặt phẳng.

**Giải**

Gọi ba vector cùng vuông góc với  $\vec{n}$  là  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{n} = \vec{b} \cdot \vec{n} = \vec{c} \cdot \vec{n} = 0$

Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vector cùng phương thì  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng.

Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vector không cùng phương, theo ví dụ trên thì  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$  là ba vector không đồng phẳng. Do đó  $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{n}$  nên  $\vec{c} \cdot \vec{n} = x\vec{a} \cdot \vec{n} + y\vec{b} \cdot \vec{n} + z\vec{n} \cdot \vec{n}$ , suy ra  $z\vec{n} \cdot \vec{n} = 0$  hay  $z = 0$ , tức là  $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ .

Vậy các vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng.

Cách khác: Giả sử  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng thì tồn tại 3 số  $x, y, z$  sao cho  $\vec{n} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

$\Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{n} = x\vec{a} \cdot \vec{n} + y\vec{b} \cdot \vec{n} + z\vec{c} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{n} = \vec{0}$  : Vô lý

Kết quả: Nếu ba đường thẳng  $d_1, d_2, d_3$  cùng vuông góc với một đường thẳng thì do kết quả nêu trên, ta có ba vector chỉ phương của ba đường thẳng  $d_1, d_2, d_3$  đồng phẳng tức là ba đường thẳng  $d_1, d_2, d_3$  cùng song song với một mặt phẳng.



**Ví dụ 12:** Cho hai đường thẳng  $a, b$  phân biệt và không song song. Chứng minh hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với cả  $a$  và  $b$  thì song song với nhau.

**Giải**

Gọi  $\Delta_1, \Delta_2$  là hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với cả  $a$  và  $b$ .  
Gọi  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  là vectơ chỉ phương của  $\Delta_1, \Delta_2$  và  $\vec{a}, \vec{b}$  là vectơ chỉ phương của  $a, b$

Theo ví dụ trên thì  $\vec{n}_1, \vec{a}, \vec{b}$  không đồng phẳng do đó tồn tại 3 số  $x, y, z$

$$\vec{n}_2 = x.\vec{n}_1 + y.\vec{a} + z.\vec{b} \Rightarrow \vec{n}_2 - x.\vec{n}_1 = y.\vec{a} + z.\vec{b}$$

$$\text{nên } (\vec{n}_2 - x.\vec{n}_1)^2 = (y.\vec{a} + z.\vec{b})(\vec{n}_2 - x.\vec{n}_1) = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = x.\vec{n}_1 \Rightarrow \text{đpcm}$$

## DẠNG 2: TÍNH GÓC GIỮA 2 ĐƯỜNG THẲNG

Góc giữa hai đường thẳng trong không gian là góc giữa hai đường thẳng cùng đi qua một điểm bất kì lần lượt song song đường thẳng đó.

Chú ý:

- Để xác định góc giữa hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ , ta có thể lấy điểm  $O$  nói trên thuộc một trong hai đường thẳng đó.

- Góc giữa hai đường thẳng không vượt quá  $90^\circ$ .

- Nếu  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  lần lượt là vectơ chỉ phương của các đường thẳng  $\Delta_1, \Delta_2$  và  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \alpha$  thì góc giữa hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  bằng  $\alpha$  nếu  $\alpha \leq 90^\circ$  và bằng  $180^\circ - \alpha$  nếu  $\alpha > 90^\circ$ .

- Xác định góc giữa hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  bằng  $\cos(\vec{u}, \vec{v})$  theo công thức:

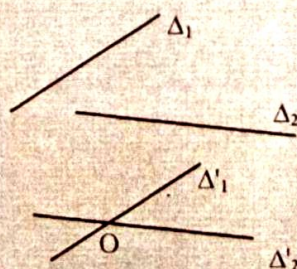
$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \text{ . Đặt biệt } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ thì } \vec{u} \perp \vec{v}$$

- Độ dài của đoạn thẳng  $AB$ :  $AB = |\overline{AB}| = \sqrt{\overline{AB}^2}$ .

- Định lý cosin cho tam giác  $ABC$ :  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

- Tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ :  $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$

- Sử dụng quan hệ song song và tính chất giao tuyến song song.



**ABC**



**Ví dụ 1:** Cho hình chóp S.ABC có  $SA = SB = SC = AB = AC = a$  và  $BC = a\sqrt{2}$ . Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

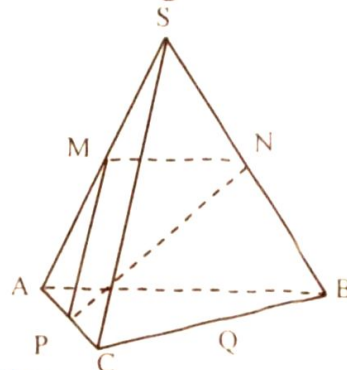
**Giải**

Ta có tam giác ABC vuông tại A nên  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  và tam giác SAB đều.

$$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= |\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{-\frac{a^2}{2}}{a^2} = -\frac{1}{2}$$



Vậy góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng  $60^\circ$ .

Cách khác: Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB, AC. Để tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB, ta cần tính  $\widehat{NMP}$ .

$$\text{Ta có } NB = MP = \frac{a}{2}, SP^2 = \frac{3a^2}{4}, BP^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$\text{Tam giác BPS : } BP^2 + SP^2 = 2NP^2 + \frac{SB^2}{2} \Rightarrow NP^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$\text{Mà } NP^2 = NM^2 + MP^2 - 2MN \cdot MP \cos \widehat{NMP}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{NMP} = -\frac{4}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{NMP} = 120^\circ \Rightarrow (SC, AB) = 60^\circ$$

**Ví dụ 2:** Cho tứ diện ABCD có  $BC = AD = a$ ,  $AC = BD = b$ ,  $AB = CD = c$ .

Tính các góc  $\alpha$  là góc giữa BC và AD;  $\beta$  là góc giữa AC và BD;  $\gamma$  là góc giữa AB và CD. Chứng minh rằng trong ba số hạng  $a^2 \cos \alpha$ ,  $b^2 \cos \beta$ ,  $c^2 \cos \gamma$  có một số hạng bằng tổng hai số hạng còn lại.

**Giải**

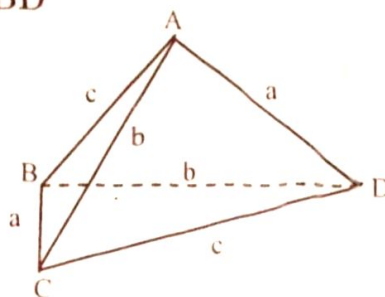
$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$$

$$= \frac{1}{2}(BC^2 + BA^2 - CA^2) - \frac{1}{2}(BC^2 + BD^2 - CD^2)$$

$$\text{Nên: } \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}) = \frac{2c^2 - 2b^2}{2a^2} = \frac{c^2 - b^2}{a^2}$$

Vậy nếu góc giữa BC và AD bằng  $\alpha$  thì:

$$\cos \alpha = \frac{|c^2 - b^2|}{a^2} \text{ hay } a^2 \cos \alpha = |c^2 - b^2|$$



Tương tự như trên, nếu gọi  $\beta$  là góc giữa AC và BD thì:



$$\cos \beta = \frac{|a^2 - c^2|}{b^2} \Rightarrow b^2 \cos \beta = |a^2 - c^2| \text{ và } \gamma \text{ là góc giữa } AB \text{ và } CD \text{ thì}$$

$$\cos \gamma = \frac{|b^2 - a^2|}{c^2} \Rightarrow c^2 \cos \gamma = |b^2 - a^2|.$$

Với  $a, b, c$  là độ dài của  $BC, CA, AB$ , ta có thể xét  $a \geq b \geq c$  thì

$$a^2 \cos \alpha = |c^2 - b^2|; b^2 \cos \beta = |a^2 - c^2|; c^2 \cos \gamma = |b^2 - a^2|$$

Từ đó, trong trường hợp này ta có  $b^2 \cos \beta = a^2 \cos \alpha + c^2 \cos \gamma$

**Ví dụ 3:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $DA'$ ,  $BD$  và  $AC'$ .

**Giải**

Gọi cạnh hình lập phương là  $x$ .

Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$

Ta có  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AD} = \vec{c} - \vec{b}$

$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA'}) = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA'}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{DA'}|} = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{b})}{AC \cdot DA'}$$

$$= \frac{\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b}^2}{x \cdot \sqrt{2} \cdot x \sqrt{2}} = \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA'}) = 120^\circ$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $DA'$  bằng  $60^\circ$

Ta có  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ . Nên:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC'} &= (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ &= \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= 0 + x^2 + 0 - x^2 + 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

Vậy  $BD \perp AC'$  nên góc giữa hai đường thẳng  $BD$  và  $AC'$  bằng  $90^\circ$ .

**Ví dụ 4:** Cho tứ diện  $ABCD$  trong đó  $AB \perp AC, AB \perp BD$ . Gọi  $P$  và  $Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Tính góc giữa 2 đường thẳng  $AB$  và  $PQ$ .

**Giải**

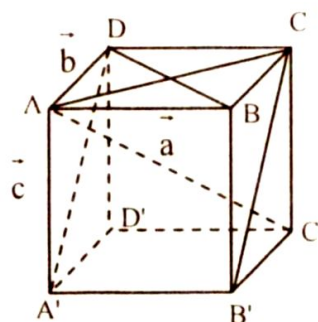
Ta có:  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$  và  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ}$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Vậy  $PQ \perp AB$  nên góc của 2 đường thẳng bằng  $90^\circ$ .

**Ví dụ 5:** Cho tứ diện đều  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $CD$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ ,  $BC$  và  $AM$ .



ABC



### Giải

Ta có:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$   
 $= a \cdot a \cdot \cos 60^\circ - a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = 0$

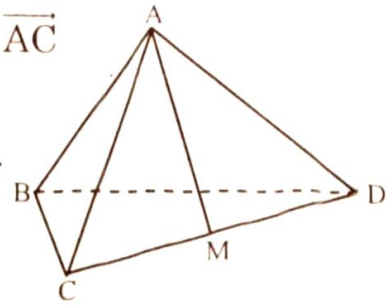
$\Rightarrow AB \perp CD$  nên góc của AB và CD bằng  $90^\circ$ .

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} &= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + a \cdot a \cdot \cos 60^\circ - a \cdot a \cdot \cos 60^\circ - a \cdot a \cdot \cos 60^\circ) = \frac{a^2}{4}\end{aligned}$$

mà  $BC = a$ ,  $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  nên  $\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM}}{BC \cdot AM} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Vậy góc giữa BC và AM là góc nhọn  $\alpha$  có  $\cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ .



**Ví dụ 6:** Cho hai tam giác cân ABC và DBC có chung cạnh đáy BC và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau.

a) Chứng minh rằng  $AD \perp CB$ .

b) Gọi M và N là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB và DB sao cho  $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ ,  $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$ . Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BC.

### Giải

a) Gọi I là trung điểm của BC thì  $AI \perp BC$ ,  $DI \perp BC$ .

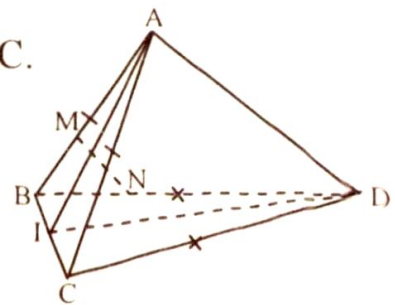
Ta có  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$

nên  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID})$   
 $= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ID} = 0$

Vậy  $BC \perp AD$

b) Từ giả thiết  $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ ,  $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$  nên  $MN \parallel AD$ .

Vậy góc giữa đường thẳng MN và BC bằng góc giữa đường thẳng AD và BC. Theo câu a) thì AD vuông góc với BC, nên góc giữa MN và BC bằng  $90^\circ$ .



**Ví dụ 7:** Cho tứ diện ABCD có  $CD = \frac{4}{3}AB$ . Gọi I, J, K lần lượt là trung

điểm của BC, AC, BD. Cho biết  $JK = \frac{5}{6}AB$ , tính góc giữa đường thẳng CD với các đường thẳng IJ và AB.

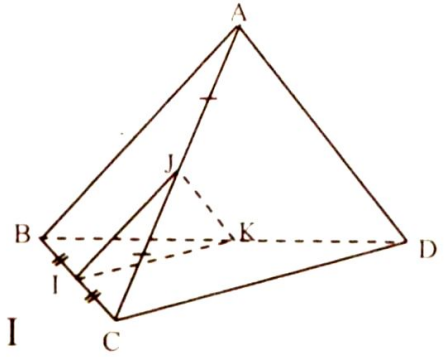


**Giải**

$$\text{Ta có } IJ = \frac{1}{2} AB, IK = \frac{1}{2} CD = \frac{2}{3} AB$$

$$IJ^2 + IK^2 = \frac{1}{4} AB^2 + \frac{4}{9} AB^2 = \frac{25}{36} AB^2$$

$$\text{mà } JK^2 = \frac{25}{36} AB^2 \text{ nên tam giác IJK vuông tại I}$$



Vậy  $JI \perp IK$ . Do  $IJ \parallel AB$ ,  $IK \parallel CD$  nên góc giữa  $AB$  và  $CD$  bằng  $90^\circ$ .

Mặt khác  $IJ \parallel AB$  mà  $AB \perp CD$  nên  $IJ \perp CD$ .

Vậy góc giữa  $IJ$  và  $CD$  bằng  $90^\circ$ .

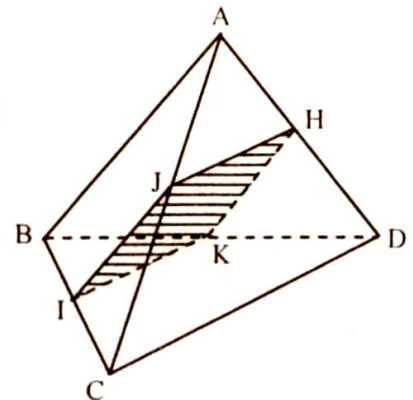
**Ví dụ 8:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, J, H, K$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AC, AD, BD$ . Hãy tính góc giữa đường thẳng  $AB$  với  $CD$  trong các trường hợp sau:

a)  $IJHK$  là hình thoi có đường chéo  $IH$  bằng  $\sqrt{3} IJ$ .

b)  $IJHK$  là hình chữ nhật.

**Giải**

Góc giữa đường thẳng  $AB$  và  $CD$  bằng góc giữa đường thẳng  $IJ$  và  $IK$ , đó là góc  $\widehat{JIK}$  hay  $180^\circ - \widehat{JIK}$ .



a) Vì  $IJHK$  là hình thoi mà  $IH = \sqrt{3} IJ$ ,

$$\text{nên } JK^2 + IH^2 = 4IJ^2$$

$$\Rightarrow JK^2 + 3IJ^2 = 4IJ^2$$

$$\Rightarrow JK^2 = IJ^2 \text{ hay } JK = IJ$$

Nên  $JIK$  là tam giác đều, do đó  $\widehat{JIK} = 60^\circ$ .

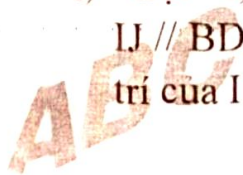
Vậy góc giữa  $AB$  và  $CD$  trong trường hợp này bằng  $60^\circ$ .

b) Khi  $IJHK$  là hình chữ nhật thì  $\widehat{JIK} = 90^\circ$ . Do đó, góc giữa  $AB$  và  $CD$  bằng  $90^\circ$ .

**Ví dụ 9:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi, cạnh bên  $SA = AB$  và  $SA$  vuông góc với  $BC$ .

a) Tính góc giữa các đường thẳng  $SD$  và  $BC$ .

b) Gọi  $I, J$  lần lượt là các điểm thuộc  $SB$  và  $SD$  sao cho  $IJ \parallel BD$ . Chứng minh rằng góc giữa  $AC$  và  $IJ$  không phụ thuộc vào vị trí của  $I$  và  $J$ .





**Giải**

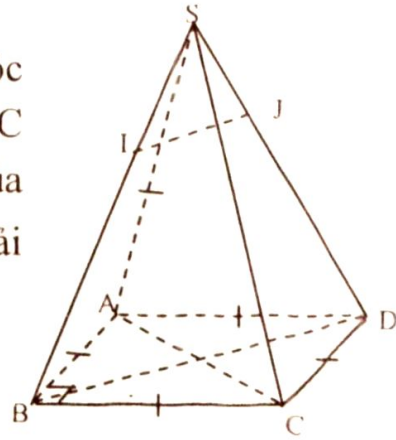
- a) Vì  $BC \parallel AD$  nên góc giữa  $SD$  và  $BC$  bằng góc giữa  $SD$  và  $AD$ . Từ giả thiết ta có  $SA \perp BC$  nên  $SA \perp AD$ . Mặt khác  $SA$  bằng cạnh của hình thoi  $ABCD$ , nên  $\widehat{SDA} = 45^\circ$  là góc phải tìm và góc  $\widehat{SDA} = 45^\circ$ .

Vậy góc giữa  $BC$  và  $SD$  bằng  $45^\circ$ .

- b) Do  $ABCD$  là hình thoi nên  $AC \perp BD$ .

Mặt khác  $IJ \parallel BD$  nên  $AC \perp IJ$ .

Vậy góc giữa  $IJ$  và  $AC$  bằng  $90^\circ$  không đổi, không phụ thuộc vào vị trí  $I$  và  $J$ .



**DẠNG 3: TOÁN TỔNG HỢP**

**Ví dụ 1:** Cho hình hộp thoi  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các cạnh bằng  $a$  và

$$\widehat{ABC} = \widehat{B'BA} = \widehat{B'BC} = 60^\circ$$

- a) Chứng minh  $AC \perp B'D'$ .  
b) Tính diện tích tứ giác  $A'B'CD$ .

**Giải**

- a) Ta có  $AC \parallel A'C'$ ,  $A'C' \perp B'D'$  (do  $A'B'C'D'$  là hình thoi) nên  $AC \perp B'D'$ .

- b) Ta có  $A'B'CD$  là hình bình hành, ngoài ra  $B'C = a = CD$  nên  $A'B'CD$  là hình thoi, hơn nữa:

$$\overrightarrow{CB'} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB'}) \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BA} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$$

nên  $CB' \perp CD$ , do đó  $A'B'CD$  là hình vuông cạnh  $a$ .

Vậy diện tích hình vuông  $A'B'CD$  là  $a^2$ .

**Ví dụ 2:** Cho tứ diện  $ABCD$  có hai mặt  $ABC$  và  $ABD$  là hai tam giác đều.

- a) Chứng minh rằng  $AB$  và  $CD$  vuông góc với nhau.  
b) Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AC, BC, BD, DA$ . Chứng minh rằng tứ giác  $MNPQ$  là hình chữ nhật.

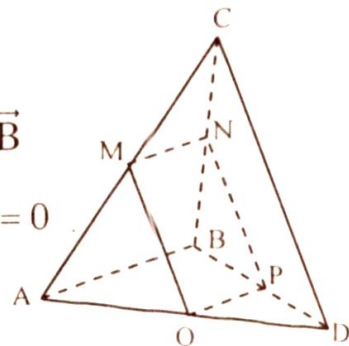
**Giải**

- a) Gọi cạnh hai tam giác đều là  $a$ .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= AD \cdot AB \cdot \cos 60^\circ - AC \cdot AB \cdot \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Vậy  $CD \perp AB$ .





b) Ta có  $MN \parallel PQ \parallel AB$  và  $MN = PQ = \frac{AB}{2}$

nên tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Vì  $MN \parallel AB$  và  $NP \parallel CD$  mà  $AB \perp CD$  nên hình bình hành MNPQ là hình chữ nhật.

**Ví dụ 3:** Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng và một đường thẳng  $\Delta$ .  $A', B', C'$  là những điểm trên  $\Delta$  sao cho  $AA', BB', CC'$  đều vuông góc với  $\Delta$ . Chứng minh rằng  $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$  khi BC không vuông góc  $\Delta$ .

**Giải**

Vì A, B, C thẳng hàng nên:  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$ ;

$A', B', C'$  cũng thẳng hàng nên  $\overrightarrow{A'B'} = k'\overrightarrow{B'C'}$

Gọi  $\vec{v} \neq \vec{0}$  là một vectơ chỉ phương của  $\Delta$  thì:

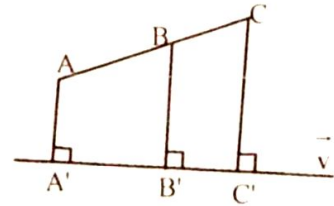
$$\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{BB'} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{CC'} \cdot \vec{v} = 0$$

Từ  $\overrightarrow{A'B'} = k'\overrightarrow{B'C'}$  ta suy ra

$$(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}) \cdot \vec{v} = k'(\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}) \cdot \vec{v} \text{ hay } \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = k' \overrightarrow{BC} \cdot \vec{v}$$

Vì  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$  nên từ đó suy ra  $k\overrightarrow{BC} \cdot \vec{v} = k' \overrightarrow{BC} \cdot \vec{v}$

Ta có  $\overrightarrow{BC} \cdot \vec{v} \neq 0$  (BC không vuông góc với  $\Delta$ ) nên  $k = k'$ , hay là  $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ .



**Ví dụ 4:** Cho tứ diện ABCD. Lấy các điểm M và N lần lượt thuộc các đường thẳng BC và AD sao cho  $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$  và  $\overrightarrow{NA} = k\overrightarrow{ND}$  với k là số thực cho trước. Đặt  $\alpha$  là góc giữa các vectơ  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{BA}$ ;  $\beta$  là góc giữa các vectơ  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{CD}$ . Tìm mối liên hệ giữa AB và CD để  $\alpha = \beta = 45^\circ$ .

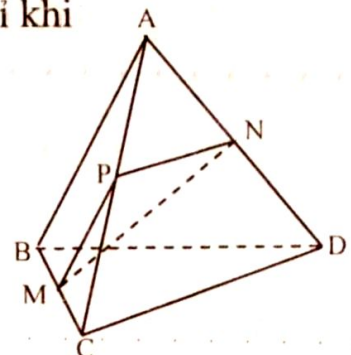
**Giải**

Vẽ  $MP \parallel AB$  thì  $NP \parallel CD$ . Từ đó, góc giữa  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{BA}$  bằng góc giữa  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{MP}$ , đó là góc  $\widehat{PMN}$ . Góc giữa  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{CD}$  bằng góc giữa  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{PN}$ , đó là góc  $\widehat{PNM}$ .

Vậy hai góc trên bằng nhau và bằng  $45^\circ$  khi và chỉ khi  $MP = NP$  và  $\widehat{MPN} = 90^\circ$ .

Từ đó, suy ra  $\frac{CP}{CA} \cdot AB = \frac{AP}{AC} \cdot CD$  và  $AB \perp CD$ .

Mặc khác, ta có  $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PC} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = |k|$ .



ABC



Vậy giữa  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$  có mối liên hệ  $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = |k|$  và  $AB \perp CD$  thì góc giữa hai vector  $\overrightarrow{MN}$  với  $\overrightarrow{BA}$  bằng góc giữa hai vector  $\overrightarrow{MN}$  với  $\overrightarrow{CD}$  và cùng bằng  $45^\circ$ .

**Ví dụ 5:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có các cạnh bằng  $a$ ,  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ ,  $\widehat{BAA'} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 120^\circ$ .

- Tính góc giữa các cặp đường thẳng  $AB$  với  $A'D$  và  $AC'$  với  $B'D$ .
- Tính diện tích các hình  $A'B'CD$  và  $ACC'A'$ .
- Tính góc giữa đường thẳng  $AC'$  và các đường thẳng  $AB$ ,  $AD$ ,  $AA'$ .

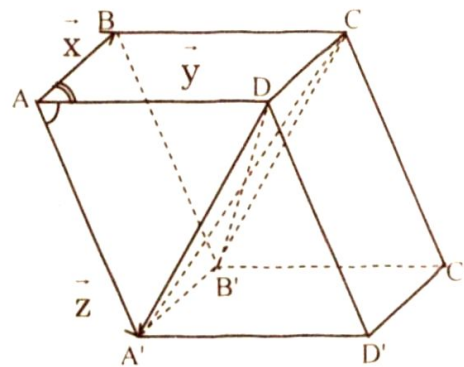
**Giải**

Chọn cơ sở  $\overrightarrow{AB} = \vec{x}, \overrightarrow{AD} = \vec{y}, \overrightarrow{AA'} = \vec{z}$  thì  $\vec{x}^2 = \vec{y}^2 = \vec{z}^2 = a^2$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \frac{a^2}{2}$$

$$\vec{y} \cdot \vec{z} = -\frac{a^2}{2}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{z} = -\frac{a^2}{2}$$



- Vì  $AB \parallel A'B'$  nên góc giữa  $AB$  và  $A'D$  bằng góc  $A'B'$  và  $A'D$ , đó là góc  $\widehat{DA'B'}$  hay  $180^\circ - \widehat{DA'B'}$ .

Đặt  $\widehat{DA'B'} = \alpha$ . Ta có  $DB'^2 = A'D^2 + A'B'^2 - 2A'D \cdot A'B' \cdot \cos \alpha$

Với  $A'D = a\sqrt{3}$ ,  $A'B' = a$

$$\overrightarrow{DB'} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \overrightarrow{DB'}^2 = 3a^2 - a^2 - a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\text{ nên } 2a^2 = a^2 + 3a^2 - 2a \cdot a\sqrt{3} \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vậy góc giữa  $A'D$  và  $AB$  bằng  $\alpha$  mà  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

$$\overrightarrow{AC'} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \overrightarrow{AC'}^2 = 3a^2 + a^2 - a^2 - a^2 = 2a^2$$

Ta có  $AB' = a$  và  $ADC'B'$  là hình bình hành mà  $AD = AB'$ ,  $AC' = B'D$  do đó  $ADC'B'$  là hình vuông nên  $AC' \perp B'D$ , tức là góc giữa  $AC'$  và  $B'D$  bằng  $90^\circ$ .

$$\text{b) } S_{A'B'CD} = A'D \cdot A'B' \sin \widehat{DA'B'} = a\sqrt{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Vậy diện tích  $S_{A'B'CD} = a^2 \sqrt{2}$

Đặt  $\widehat{ACC'} = \beta$  thì  $AC'^2 = AC^2 + CC'^2 - 2AC \cdot CC' \cos \beta$

$$\text{ hay } 2a^2 = 3a^2 + a^2 - 2a\sqrt{3} \cdot a \cos \beta$$



$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Vậy diện tích } S_{ACC'A'} = AC \cdot CC' \sin \beta = a\sqrt{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = a^2 \sqrt{2}$$

c) Ta có  $\overrightarrow{AC'} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$  nên

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AB} = (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}) \cdot \vec{x} = a^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = a^2$$

$$\text{hay } |\overrightarrow{AC'}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos \gamma = a^2 \Rightarrow \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \gamma = 45^\circ$$

Vậy góc giữa AB và AC' bằng  $45^\circ$ .

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AD} = (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}) \cdot \vec{y} = \frac{a^2}{2} + a^2 - \frac{a^2}{2} = a^2$$

$$\text{hay } |\overrightarrow{AC'}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos \varphi = a^2 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

Vậy góc giữa AD và AC' bằng  $45^\circ$ .

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AA'} = (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}) \cdot \vec{z} = -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} + a^2 = 0$$

Vậy góc giữa AC' và AA' bằng  $90^\circ$ .

**Ví dụ 6:** Cho tứ diện ABCD trong đó góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng  $\alpha$ . Gọi M là điểm bất kì thuộc cạnh AC, đặt  $AM = x$  ( $0 < x < AC$ ). Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với AB, CD.

- Xác định vị trí điểm M để diện tích thiết diện của hình tứ diện ABCD khi cắt bởi mp(P) đạt giá trị lớn nhất.
- Chứng minh rằng chu vi thiết diện nêu trên không phụ thuộc vào x khi và chỉ khi  $AB = CD$ .

**Giải**

a) Thiết diện là hình bình hành MNQR.

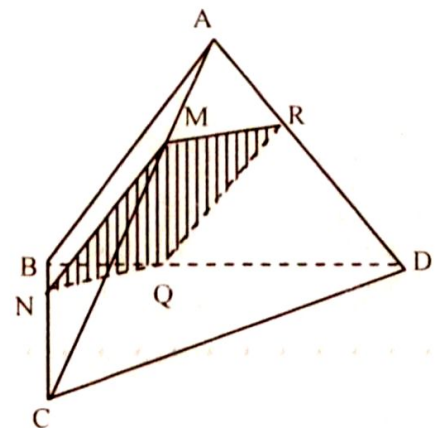
$$S_{MNQR} = NM \cdot NQ \cdot \sin \widehat{MNQ}$$

Do  $MN \parallel AB$ ,  $NQ \parallel CD$  nên góc giữa MN và NQ bằng góc giữa AB và CD nên  $\sin \widehat{MNQ} = \sin \alpha$ .

$$\text{Ta có } \frac{MN}{AB} = \frac{AC - x}{AC} \Rightarrow MN = \frac{AB}{AC} (AC - x)$$

$$NQ = MR, \frac{MR}{CD} = \frac{AM}{AC} = \frac{x}{AC} \Rightarrow MR = \frac{CD}{AC} x$$

$$\text{nên } S_{MNQR} = \frac{AB \cdot CD}{AC^2} (AC - x)x \cdot \sin \alpha \leq \frac{1}{4} AB \cdot CD \cdot \sin \alpha$$





$$\text{Từ đó } S_{MNPQ} \max \Leftrightarrow AC - x = x \Leftrightarrow x = \frac{AC}{2}.$$

Vậy khi M là trung điểm của AC thì diện tích thiết diện của ABCD cắt bởi (P) đạt giá trị lớn nhất.

b) Gọi P là nửa chu vi thiết diện, khi đó

$$p = MN + MR = \frac{AB}{AC}(AC - x) + \frac{CD}{AC}x = \frac{CD - AB}{AC}x + AB$$

Từ đó, chu vi thiết diện không phụ thuộc vào x khi và chỉ khi  $CD - AB = 0$  hay  $AB = CD$ .

**Ví dụ 7:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành,  $AD = 2AB$ , mặt bên (SAB) là tam giác vuông tại A. Với điểm M bất kì thuộc cạnh AD (M khác A và D), xét mặt phẳng ( $\alpha$ ) đi qua điểm M và song song với SA, CD.

a) Thiết diện của hình chóp S.ABCD khi cắt bởi mp( $\alpha$ ) là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện theo a và b, biết  $AB = a$ ,  $SA = b$ , và  $MA = 2MD$ .

**Giải**

a) Thiết diện là MNPQ trong đó  $MN \parallel QP \parallel CD$ ,  $MQ \parallel SA$ .

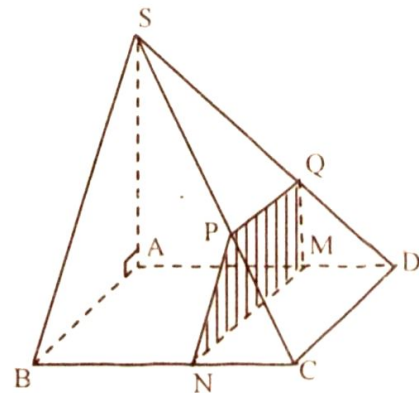
Do  $SA \perp AB$ ,  $AB \parallel MN$ ,  $MQ \parallel SA$  nên thiết diện MNPQ là hình thang vuông tại M và Q.

$$b) S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).MQ$$

$$\text{Do } MA = 2MD \text{ nên } MQ = \frac{1}{3}SA = \frac{1}{3}b$$

$$PQ = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3}a, MN = a$$

$$\text{Vậy diện tích } S_{MNPQ} = \frac{1}{2} \left( a + \frac{2a}{3} \right) \cdot \frac{b}{3} = \frac{5ab}{18}.$$



**Ví dụ 8:** Cho hình tứ diện ABCD, I và K lần lượt là các trung điểm của AB và CD.

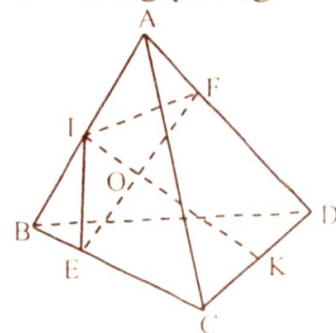
a) Chứng minh các vector  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{IK}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  là đồng phẳng.

b) Mặt phẳng (P) qua IK, cắt BC tại E, cắt AD tại F, chứng minh rằng nếu  $\overrightarrow{BE} = \alpha \overrightarrow{BC}$  thì  $\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{EF}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  đồng phẳng.

c) Chứng minh nếu  $IK \perp AB$  và  $IK \perp CD$  thì  $IK \perp EF$  tại O và O là trung điểm của EF.

**Giải**

a) Chọn hệ vector cơ sở :  $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$





$$\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AI}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}).$$

Vậy  $\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$  là đồng phẳng.

b) Ta có  $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BE} = -\frac{\vec{c}}{2} + \alpha \vec{a}$ . Đặt  $\overrightarrow{AF} = \beta \cdot \overrightarrow{AD}$  thì

$$\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AF} = \frac{\vec{c}}{2} + \beta(\vec{b} - \vec{c}); \quad \overrightarrow{IK} = \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} - \frac{\vec{c}}{2}$$

Ta chứng minh  $\alpha = \beta$

Vì  $\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IE}, \overrightarrow{IF}$  đồng phẳng nên có x, y sao cho :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IK} = x\overrightarrow{IE} + y\overrightarrow{IF} &\Leftrightarrow \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} - \frac{\vec{c}}{2} = -\frac{x\vec{c}}{2} + x\alpha\vec{a} + \frac{y\vec{c}}{2} + y\beta(\vec{b} - \vec{c}) \\ &= x\alpha\vec{a} + y\beta\vec{b} + \left(\frac{y}{2} - \frac{x}{2} - y\beta\right)\vec{c} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\alpha = \frac{1}{2} \\ y\beta = \frac{1}{2} \\ \frac{y}{2} - \frac{x}{2} - y\beta = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \alpha = \beta \\ x\alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

nên  $\overrightarrow{AF} = \beta \cdot \overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AD}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\alpha\vec{a} + \vec{c} + \alpha(\vec{b} - \vec{c}) \\ &= \alpha(\vec{b} - \vec{a}) + (1 - \alpha)\vec{c} = \alpha\overrightarrow{CD} + (1 - \alpha)\overrightarrow{BA} \end{aligned}$$

Vậy  $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BA}$  là đồng phẳng.

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có: } \overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{IK} \left[ \alpha\overrightarrow{CD} + (1 - \alpha)\overrightarrow{BA} \right] \\ &= \alpha \cdot \overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{CD} + (1 - \alpha) \overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \end{aligned}$$

Vậy  $IK \perp EF$  tại O.

Vì I, O, K thẳng hàng nên có số  $\gamma$  sao cho:  $\overrightarrow{IO} = \gamma \overrightarrow{IK}$

Vì E, O, F thẳng hàng nên có số z sao cho:

$$z\overrightarrow{IE} + (1 - z)\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IO} = \gamma \overrightarrow{IK}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{IE} = -\frac{\vec{c}}{2} + \alpha\vec{a}; \quad \overrightarrow{IF} = \frac{\vec{c}}{2} + \beta(\vec{b} - \vec{c}) = \frac{\vec{c}}{2} + \alpha(\vec{b} - \vec{c})$$

$$\text{nên } z\left(-\frac{\vec{c}}{2} + \alpha\vec{a}\right) + (1 - z)\left[\frac{\vec{c}}{2} + \alpha(\vec{b} - \vec{c})\right] = \gamma\left(\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} - \frac{\vec{c}}{2}\right)$$



$$\Leftrightarrow z\alpha \vec{a} + (1-z)\alpha \vec{b} + \left( \frac{-z}{2} + \frac{1}{2} - \frac{z}{2} - \alpha + z\alpha \right) \vec{c} = \frac{\gamma}{2} \vec{a} + \frac{\gamma}{2} \vec{b} - \frac{\gamma}{2} \vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z\alpha = \frac{\gamma}{2} \\ (1-z)\alpha = \frac{\gamma}{2} \\ \frac{1}{2} - z - \alpha + z\alpha = -\frac{\gamma}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Suy ra  $\vec{IO} = \frac{1}{2}(\vec{IE} + \vec{IF}) \Rightarrow O$  là trung điểm của  $EF$ .

**Ví dụ 9:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Các điểm  $M, N$  lần lượt chia các đoạn thẳng  $AD'$  và  $DB$  theo cùng tỉ số  $k$  ( $k \neq 0, 1$ ). Chứng minh:

a)  $MN$  luôn luôn song song với  $mp(A'BCD')$

b) Nếu  $k = -\frac{1}{2}$  thì  $MN \parallel A'C$  và  $MN \perp AD'$  và  $MN \perp DB$ .

**Giải**

a) Đặt :  $\vec{AA'} = \vec{a}$ ,  $\vec{AB} = \vec{b}$ ,  $\vec{AD} = \vec{c}$

Theo giả thiết, ta có:

$$\vec{AM} = \frac{k}{k-1} \vec{AD'} = \frac{k}{k-1} (\vec{a} + \vec{c})$$

$$\vec{AN} = \frac{\vec{AD} - k\vec{AB}}{1-k} = \frac{\vec{c} - k\vec{b}}{1-k}$$

$$\text{Suy ra : } \vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{\vec{c} - k\vec{b} + k\vec{a} + k\vec{c}}{1-k}$$

$$= \frac{1}{1-k} [k(\vec{a} - \vec{b}) + (k+1)\vec{c}] = \frac{k}{1-k} \vec{BA'} + \frac{1+k}{1-k} \vec{BC}$$

Do đó  $\vec{MN}$ ,  $\vec{BA'}$ ,  $\vec{BC}$  đồng phẳng và vì  $MN$  không thuộc  $mp(A'BCD')$  nên  $MN \parallel (A'BCD')$

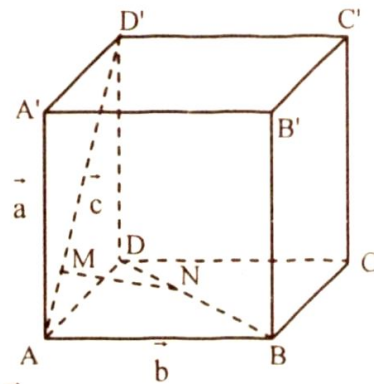
b) Khi  $k = -\frac{1}{2}$  thì  $\vec{MN} = -\frac{1}{3} \vec{BA'} + \frac{1}{3} \vec{BC} = \frac{1}{3} \vec{A'C}$

Và do các đường thẳng  $MN$  và  $A'C$  cắt  $mp(ABCD)$  tại các điểm khác nhau nên chúng không trùng nhau. Vậy  $MN \parallel A'C$ .

$$\vec{MN} \cdot \vec{AD'} = \frac{1}{3} \vec{A'C} \cdot \vec{AD'} = \frac{1}{3} (\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}) (\vec{c} + \vec{a})$$

$$= \frac{1}{3} \vec{b}(\vec{c} + \vec{a}) + \frac{1}{3} (\vec{c}^2 - \vec{a}^2) = 0 \Rightarrow MN \perp AD'$$

Tương tự ta chứng minh được  $MN \perp DB$ .





**Ví dụ 10:** Một tứ diện gọi là gần đều nếu các cạnh đối bằng nhau từng đôi một.

a) Với tứ diện ABCD, chứng tỏ các tính chất sau là tương đương:

- (i) Tứ diện ABCD là gần đều ;
- (ii) Các đoạn thẳng nối trung điểm các cặp cạnh đối diện đôi một vuông góc với nhau ;
- (iii) Các trọng tuyến (đoạn thẳng nối đỉnh với trọng tâm mặt đối diện) bằng nhau ;
- (iv) Tổng các góc tại mỗi đỉnh bằng  $180^\circ$  .

b) Chứng tỏ hình khai triển của tứ diện gần đều ABCD trên mp(BCD) làm thành một tam giác nhọn.

### Giải

a) - Chứng minh (i)  $\Leftrightarrow$  (ii)

Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD.

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Do  $AC = BD$  nên MPNQ là hình thoi, vì thế

$MN \perp PQ$ . Tương tự ta có  $MN \perp EF$ ,  $PQ \perp EF$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i): MPNQ là hình bình hành mà  $MN \perp PQ$  nên MPNQ là hình thoi, tức là  $MP = MQ$ , từ đó  $AC = BD$ .

Tương tự có  $BC = AD$ ,  $AB = CD$ .

- Chứng minh (i)  $\Leftrightarrow$  (iii)

Gọi A', B' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD và ACD.

(i)  $\Rightarrow$  (iii): Ta có  $\triangle BCD = \triangle ADC$  (c.c.c) nên  $BN = AN$ , từ đó  $A'N = B'N$  .

Vậy  $\triangle AA'N = \triangle BB'N$  (c.g.c), suy ra  $AA' = BB'$

Tương tự ta có đpcm.

(iii)  $\Rightarrow$  (i): Do giả thiết ta có  $BB' = AA'$ , mà  $AA'$  cắt  $BB'$  tại G,  $AG = 3GA'$ ,  $BG = 3GB'$  nên  $BG = AG$  và  $GA' = GB'$ . Các tam giác  $BGA'$  và  $AGB'$  bằng nhau nên  $BA' = AB'$ ,  $BN = AN$ .

$$\text{mà } AC^2 + AD^2 = 2AN^2 + \frac{CD^2}{2} ; BC^2 + BD^2 = 2BN^2 + \frac{CD^2}{2}$$

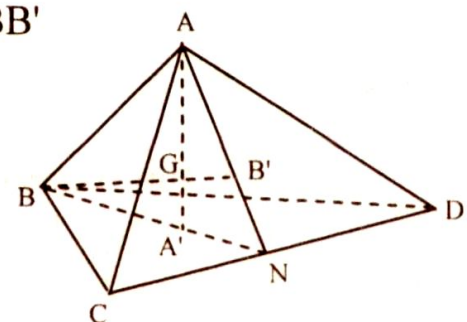
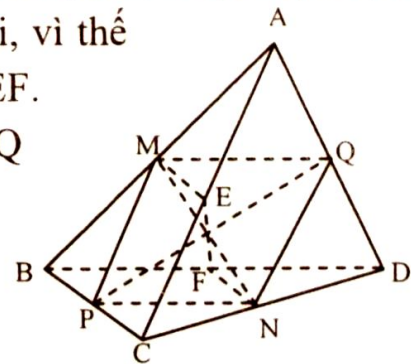
$$\text{do đó } AC^2 + AD^2 = BC^2 + BD^2 .$$

$$\text{Tương tự } CA^2 + CB^2 = DA^2 + DB^2 .$$

$$\text{Suy ra } AD = BC \text{ và } AC = BD.$$

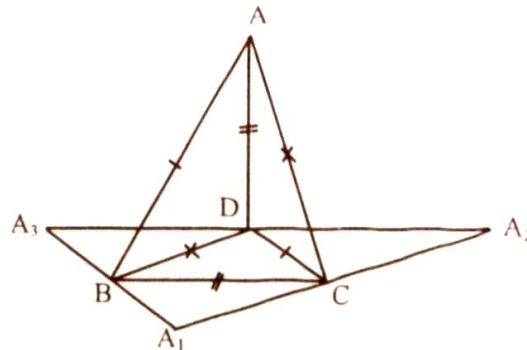
$$\text{Tương tự ta có } AB = CD.$$

- Chứng minh (i)  $\Leftrightarrow$  (iv)





(i)  $\Rightarrow$  (iv): Do sự bằng nhau của các tam giác ABC, CDA, BAD với tam giác CDB nên tổng các góc tại B bằng  $180^\circ$ . Đối với các đỉnh còn lại cũng được lý luận tương tự như trên.



(iv)  $\Rightarrow$  (i): Trải các mặt ABC, ACD, ABD lên mặt phẳng (BCD).

Do tổng các góc tại B cũng như tại C, tại D đều bằng  $180^\circ$  nên các bộ ba điểm  $A_1, C, A_2$ ;  $A_2, D, A_3$ ;  $A_3, B, A_1$  là những bộ ba điểm thẳng hàng. Như vậy BC, CD, BD là ba đường trung bình của tam giác  $A_1A_2A_3$ .

Từ đó  $BD = A_1C = CA_2 = CA$ .

Tương tự ta có  $AD = BC, CD = AB$ .

b) Theo chứng minh trên thì ta có hình khai triển của tứ diện ABCD trên mặt phẳng (BCD) là tam giác  $A_1A_2A_3$ .

Ta chứng minh tam giác  $A_1A_2A_3$  có ba góc nhọn.

Thật vậy, xét tam giác  $AA_1A_2$  có  $AC = A_1C = A_2C$  nên

$AA_1 \perp AA_2$ . Tương tự thì  $AA_1, AA_2, A_1A_3$  đôi một vuông góc.

Ta có:  $A_1A_2^2 = AA_1^2 + AA_2^2$ ;  $A_2A_3^2 = AA_2^2 + AA_3^2$ ;

$$A_3A_1^2 = AA_3^2 + AA_1^2$$

$$\Rightarrow A_1A_2^2 + A_2A_3^2 > A_1A_3^2; A_2A_3^2 + A_3A_1^2 > A_1A_2^2;$$

$$A_3A_1^2 + A_1A_2^2 > A_2A_3^2$$

Dùng định lý hàm số cosin cho tam giác  $A_1A_2A_3 \Rightarrow \text{đpcm}$ .

## C. BÀI LUYỆN TẬP

1. Mệnh đề sau đúng hay sai:

a)  $a \perp b, a \perp c \Rightarrow b \parallel c$

b)  $a \perp b, b \perp c \Rightarrow a \parallel c$

c)  $a \perp b, b \parallel c \Rightarrow a \perp c$

d)  $a \perp b \Rightarrow a \text{ cắt } b$

**ĐS:** a) S b) S c) Đ d) S.

2. Cho tứ diện đều ABCD. Gọi M trung điểm CD, cho  $AM = b$ .

a) Tính góc giữa AB và CD, AB và AM.

b) Tính khoảng cách từ A đến trọng tâm G của tam giác BCD.

**HD:** b) dùng bình phương vô hướng

3. Cho tứ diện đều ABCD. Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, CD, AD, BC, AC.

Chứng minh  $MN \perp RP$  và  $MN \perp RQ$ .

4. Cho tứ diện gàn đều ABCD có các cặp cạnh đối  $AB = CD = 3$ ,  $AC = BD = 5$ ,  $AD = BC = 4$ . Tính các góc giữa các đường thẳng BC và AD, AC và BD, AB và CD.

**HD:**  $\cos(AB, CD) = |\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})|$

5. Hai tam giác cân ABC, DBC nằm trong 2 mặt phẳng khác nhau.

Gọi M, N thuộc AB, DB sao cho  $\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MB}$ ,  $\overrightarrow{ND} = -3\overrightarrow{NB}$ . Tính góc giữa đường thẳng MN và BC.

**ĐS:**  $90^\circ$

6. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB'.

a) Chứng minh :  $MN \perp A'C$ .

b) Chứng minh  $\cos(MN, AC') = \sqrt{2}/3$ .

c) Lấy E, F thuộc B'C', CD mà B'E = CF. Tính góc giữa AE và BF.

**HD:** dùng quan hệ vector

7. Cho tứ diện ABCD. Cho  $g(AB, CD) = g(AC, BD) = 90^\circ$ . Tính  $g(AD, BC)$ .

**ĐS:**  $90^\circ$

8. Cho hình hộp thoi ABCD.A'B'C'D' các cạnh bằng a, góc  $\widehat{BAD} = 90^\circ$ ,

$\widehat{DAA'} = 60^\circ$ . Tính  $g(AB, A'D)$ ,  $g(AC', B'D)$ .

9. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N thuộc AD', DB sao cho  $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MD'}$ ;  $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$ ,  $k \neq 0$ . Chứng minh:

a)  $MN \parallel (A'BC)$

b) Nếu  $MN \parallel A'C$  thì  $MN \perp AD', DB$ .

10. Cho tứ diện ABCD. Xác định thiết diện cắt bởi mp (P) song song AC và BD mà có diện tích thiết diện lớn nhất.

**HD:** dùng bất đẳng thức Côsi

11. Cho tứ diện vuông OBCD có 3 cạnh OB, OC, OD đôi một vuông góc nhau. Chứng minh tam giác BCD nhọn.

**HD:** dùng định lý hàm số cosin

12. Cho 2 vector  $\vec{a}, \vec{b}$  không cùng phương ở trên mặt phẳng (P). Chứng minh nếu  $\vec{n}$  vuông góc chung với  $\vec{a}, \vec{b}$  thì vector  $\vec{n}$  vuông góc với mọi vector thuộc mặt phẳng (P)

**HD:** Mọi vector  $\vec{u}$  ở trên mặt phẳng (P) đều biểu diễn theo 2 vector  $\vec{a}, \vec{b}$ .

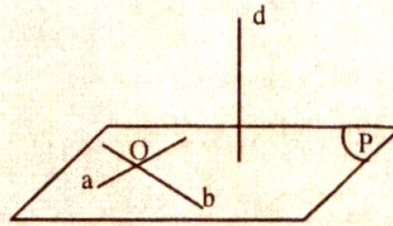
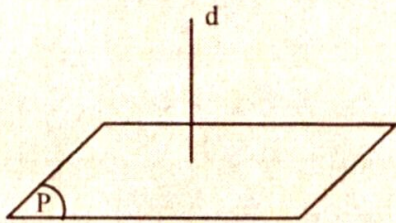


## §3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

– Một đường thẳng gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

– Nếu đường thẳng  $d$  vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau  $a$  và  $b$  cùng nằm trong mặt phẳng  $(P)$  thì đường thẳng  $d$  vuông góc với mặt phẳng  $(P)$ .



– Có duy nhất một mặt phẳng  $(P)$  đi qua một điểm  $O$  cho trước và vuông góc với một đường thẳng  $a$  cho trước.

– Có duy nhất một đường thẳng  $\Delta$  đi qua một điểm  $O$  cho trước và vuông góc với một mặt phẳng  $(P)$  cho trước.

– Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là mặt phẳng vuông góc với đoạn đó tại trung điểm.

– Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.

– Trục của một tam giác là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng tam giác tại tâm đường tròn ngoại tiếp.

– Trục của tam giác là tập hợp các điểm cách đều 3 đỉnh của tam giác.

– Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.

– Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

– Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại.

– Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

– Cho đường thẳng  $a$  và mặt phẳng  $(P)$  song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với  $(P)$  thì cũng vuông góc với  $a$ .

– Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

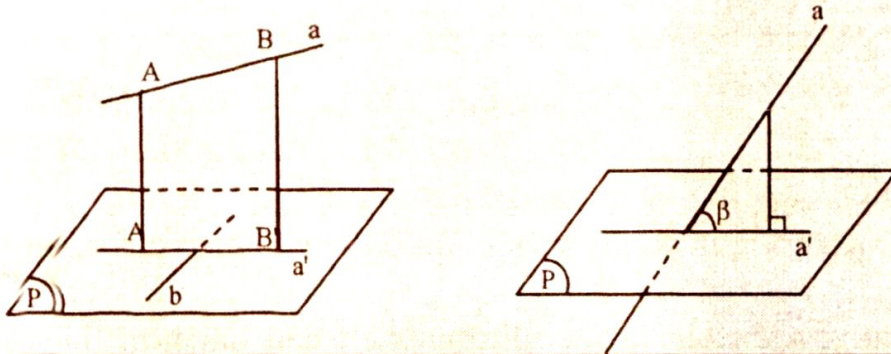
– Phép chiếu song song lên mặt phẳng  $(P)$  theo phương vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng  $(P)$ .



– Định lý ba đường vuông góc: Cho đường thẳng  $a$  không vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  và đường thẳng  $b$  nằm trong  $(P)$ . Khi đó, điều kiện cần và đủ để  $b$  vuông góc với  $a$  là  $b$  vuông góc với hình chiếu  $a'$  của  $a$  trên  $(P)$ .

– Nếu đường thẳng  $a$  vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng  $a$  và mặt phẳng  $(P)$  bằng  $90^\circ$ .

– Nếu đường thẳng  $a$  không vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  thì góc giữa  $a$  và hình chiếu  $a'$  của nó trên  $(P)$  gọi là góc giữa đường thẳng  $a$  và mặt phẳng  $(P)$ .



## B. PHÂN DẠNG TOÁN

### DẠNG 1: CHỨNG MINH VUÔNG GÓC

• Để chứng minh đường thẳng  $d$  vuông góc với  $mp(\alpha)$  có thể chứng minh:

- $d$  vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau trên  $(\alpha)$ .
- $d$  vuông góc với hai cạnh tam giác  $ABC$  nằm trên  $(\alpha)$ .
- $d // d'$  mà  $d' \perp mp(\alpha)$ .
- $d \perp mp(\beta)$  mà  $mp(\beta) // mp(\alpha)$ .

–  $d$  là trục của tam giác  $ABC$  nằm trên  $mp(\alpha)$  (nghĩa là chứng minh  $d$  chứa hai điểm cách đều  $A, B, C$ ).

• Để chứng minh hai đường thẳng  $d$  và  $d'$  vuông góc, có thể chứng minh:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , với  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  lần lượt là vectơ chỉ phương của  $d$  và  $d'$ .
- góc giữa chúng bằng  $90^\circ$ .

–  $d$  song song với đường thẳng  $\Delta$  trung gian, còn  $d'$  vuông góc với đường thẳng  $\Delta$ .

– đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia.

– đường thẳng này vuông góc với hình chiếu của đường thẳng kia trên một mặt phẳng.

– Đặc biệt, khi  $d$  và  $d'$  cắt nhau, đưa về bài toán vuông góc phẳng: 2 đường chéo hình thoi, trung tuyến của tam giác cân, góc có cạnh tương ứng vuông góc, định lý đảo của định lý Pitago, ...



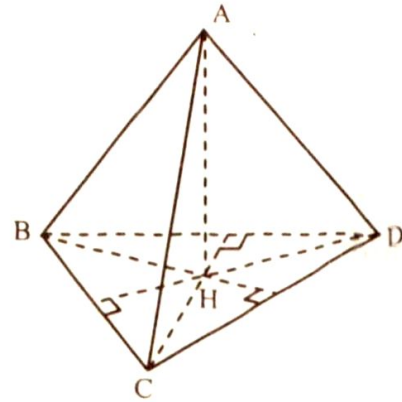
**Ví dụ 1:** Chứng minh rằng nếu tứ diện ABCD có  $AB \perp CD$  và  $AC \perp BD$  thì  $AD \perp BC$ .

**Giải**

Hạ  $AH \perp (BCD)$  tại H, thì  $CD \perp AH$  mà  $CD \perp AB$  nên  $CD \perp mp(ABH) \Rightarrow CD \perp BH$ . Tương tự vì  $BD \perp AC$  thì  $BD \perp CH$ .

Do đó H là trực tâm của tam giác BCD nên  $DH \perp BC$ .

Mà  $AH \perp BC$  nên  $BC \perp AD$ .



**Ví dụ 2:** Cho điểm S có hình chiếu trên mp(P) là H. Với điểm M bất kì trên (P) (M không trùng H), ta gọi đoạn thẳng SM là đường xiên, đoạn thẳng HM là hình chiếu của đường xiên đó. Chứng minh:

- Hai đường xiên bằng nhau khi và chỉ khi hai hình chiếu của chúng bằng nhau.
- Với hai đường xiên cho trước, đường xiên nào dài hơn thì có hình chiếu dài hơn và ngược lại, đường xiên nào có hình chiếu dài hơn thì dài hơn.

**Giải**

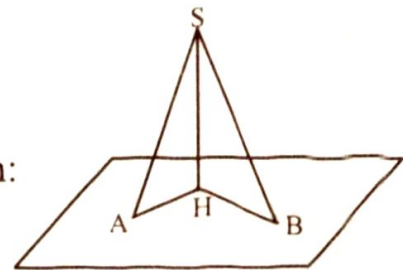
- a) Vì  $SH \perp mp(P) \Rightarrow SH \perp HA, HB$ .

Hai tam giác vuông SHA, SHB có SH chung nên:

$$SA = SB \Leftrightarrow HA = HB: đpcm.$$

- b) Ta có  $SH^2 = SA^2 - HA^2 = SB^2 - HB^2$  nên:

$$SA > SB \Leftrightarrow HA > HB: đpcm.$$



**Ví dụ 3:** Cho hình tứ diện vuông OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Chứng minh:

- Tam giác ABC có ba góc nhọn.
- Hình chiếu H của điểm O trên mp(ABC) trùng với trực tâm tam giác ABC.

$$c) \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

**Giải**

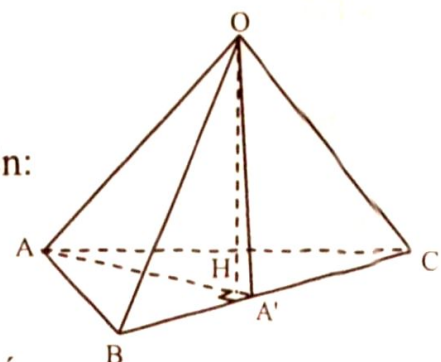
- a) Các tam giác OAB, OBC, OCA vuông tại O nên:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$

$$BC^2 = OB^2 + OC^2$$

$$AC^2 = OA^2 + OC^2$$

Do đó  $BC^2 < AB^2 + AC^2$  nên góc B của tam giác ABC là góc nhọn. Tương tự thì tam giác ABC có cả ba góc đều nhọn.



- b) Vì H là hình chiếu của điểm O trên mp(ABC) nên  $OH \perp (ABC)$ . Mà  $OA \perp (OBC)$  nên  $OA \perp BC$  do đó hình chiếu  $AH \perp BC$ . Tương tự thì  $BH \perp CA$ .

Vậy H là trực tâm tam giác ABC.

- c) Nếu  $AH \perp BC$  tại A' thì  $BC \perp OA'$ . Vì OH là đường cao của tam giác vuông AOA', vuông tại O và OA' là đường cao của tam giác vuông BOC, vuông tại O nên:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OA'^2}, \quad \frac{1}{OA'^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

**Ví dụ 4:** Cho hình chóp S.ABC có  $SA \perp mp(ABC)$  và tam giác ABC không vuông. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng:

a) AH, SK, BC đồng quy.

b)  $SC \perp mp(BHK)$

c)  $HK \perp mp(SBC)$ .

**Giải**

- a) Gọi AA' là đường cao của tam giác ABC, do  $SA \perp (ABC)$  nên  $SA' \perp BC$ . Vì H là trực tâm tam giác ABC, K là trực tâm tam giác SBC nên H thuộc AA', K thuộc SA'. Vậy AH, SK, BC đồng quy tại A'.

- b) Do H là trực tâm tam giác ABC nên  $BH \perp AC$ , mà  $BH \perp SA$  nên  $BH \perp SC$ . Mà K là trực tâm tam giác SBC nên  $BK \perp SC$ . Vậy  $SC \perp (BHK)$ .

- c) Từ câu b) ta suy ra  $HK \perp SC$ . Mà  $HK \perp BC$  do  $BC \perp (SAA')$ .

Vậy  $HK \perp mp(SBC)$ .

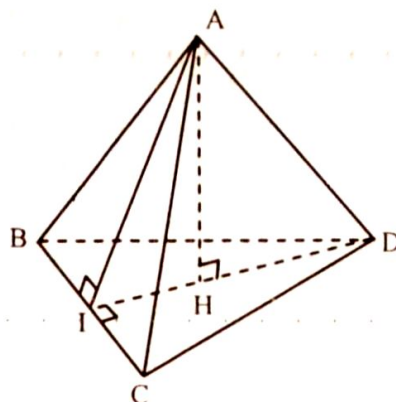
**Ví dụ 5:** Hai tam giác cân ABC và DBC nằm trong hai mặt phẳng khác nhau có chung cạnh đáy BC tạo nên tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh  $BC \perp AD$ .

b) Gọi AH là đường cao của tam giác ADI. Chứng minh rằng AH vuông góc với mặt phẳng (BCD).

**Giải**

- a) Tam giác ABC cân đỉnh A và có I là trung điểm của BC nên  $AI \perp BC$ . Tương tự tam giác DBC cân đỉnh D và có I là trung điểm của BC nên  $DI \perp BC$ .





Ta suy ra:  $BC \perp (AID)$  nên  $BC \perp AD$ .

b) Vì  $BC \perp (AID)$  nên  $BC \perp AH$ .

Mặt khác  $AH \perp ID$  nên ta suy ra  $AH$  vuông góc với mặt phẳng  $(BCD)$ .

**Ví dụ 6:** Tứ diện  $OABC$  có các cạnh  $OA = OB = OC = a$  và  $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^\circ$ ,  $\widehat{BOC} = 90^\circ$ .

a) Tính độ dài các cạnh còn lại của tứ diện. Từ đó suy ra tam giác  $ABC$  là tam giác vuông.

b) Chứng minh rằng  $OA \perp BC$  và nếu gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $OA, BC$  thì  $IJ \perp OA$  và  $IJ \perp BC$ . Tính đoạn  $IJ$ .

### Giải

a) Các tam giác  $AOB$  và  $AOC$  là tam giác đều cạnh  $a$  nên  $AB = AC = a$  và  $\triangle BOC$  vuông cân nên  $BC = a\sqrt{2}$ .

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2a^2.$$

Do đó  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $A$ .

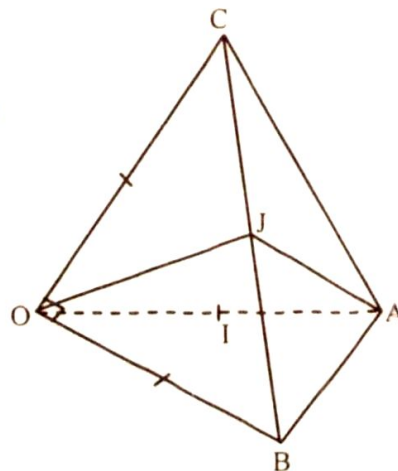
b) Do  $O$  và  $A$  cách đều  $B, C$  nên chúng thuộc mặt phẳng trung trực  $(OAIJ)$  của đoạn  $BC$ .

Vì vậy:  $OA \perp BC$  và  $IJ \perp BC$ .

Ta có:  $OJ = JA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$  và  $OA = a$  nên tam

giác  $\triangle OAJ$  vuông cân tại  $J$  và  $IJ \perp OA$ ;

$$IJ = \frac{1}{2}OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



**Ví dụ 7:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ .

a) Gọi  $O, O'$  là tâm của 2 đáy. Chứng minh  $OO' \perp mp(A'B'C'D')$ .

b) Chứng minh đường chéo  $AC' \perp mp(A'BD)$ .

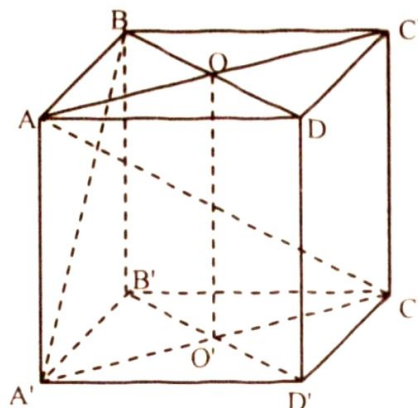
### Giải

a) Ta có  $AA' \perp A'B', A'D'$  nên:  $AA' \perp mp(A'B'C'D')$ .

Vì  $O, O'$  là 2 tâm của 2 đáy nên:  $OO' \parallel AA'$ .

Do đó  $OO' \perp mp(A'B'C'D')$ .

b) Ta có:  $AA' = AB = AD$  và  $C'A' = C'B = C'D = AB\sqrt{2}$  nên  $A$  và  $C'$  cách đều 3 đỉnh  $A', B, D$ , do đó  $AC'$  là trục của tam giác  $A'BD$ .  
Vậy  $AC' \perp mp(A'BD)$ .



**Ví dụ 8:** Hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy là (ABC). Gọi D là điểm đối xứng của điểm B qua trung điểm O của cạnh AC.

Chứng minh  $CD \perp (SCA)$ .

**Giải**

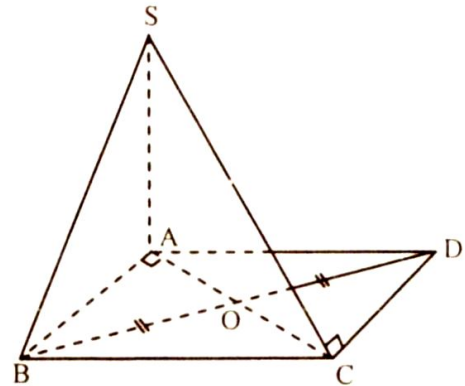
Ta có  $SA \perp (ABC)$

$\Rightarrow SA \perp DC$

Vì AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn nên tứ giác ABCD là hình bình hành và do đó  $AB \parallel DC$ .

Vì  $AB \perp AC$  nên  $CD \perp CA$ , mà  $CD \perp SA$ .

Do đó  $CD \perp (SCA)$ .



**Ví dụ 9:** Cho tam giác ABC. Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng vuông góc với đường thẳng CA tại A và  $(\beta)$  là mặt phẳng vuông góc với đường thẳng CB tại B. Chứng minh rằng hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  cắt nhau và giao tuyến d của chúng vuông góc với mặt phẳng (ABC).

**Giải**

Hai mặt phẳng hoặc trùng nhau hoặc song song hoặc cắt nhau.

– Giả sử  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  trùng nhau thì từ một điểm C ta dựng được hai đường thẳng CA, CB cùng vuông góc với một mặt phẳng: vô lí.

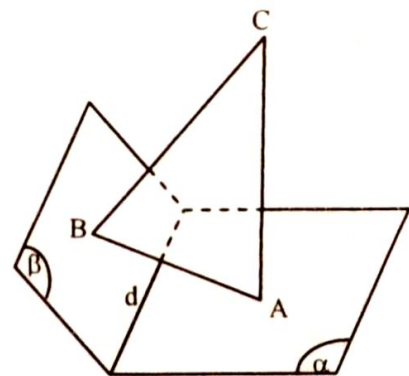
– Giả sử  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  song song thì từ  $CB \perp (\beta)$  ta suy ra  $CB \perp (\alpha)$ . Do đó từ một điểm C ta dựng được hai đường thẳng CA, CB cùng vuông góc với  $(\alpha)$ : vô lí.

Vậy  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  cắt nhau theo giao tuyến d.

Ta có  $CA \perp (\alpha)$ ,  $d \subset (\alpha) \Rightarrow CA \perp d$ .

$CB \perp (\beta)$ ,  $d \subset (\beta)$

$\Rightarrow CB \perp d$ , do đó  $d \perp mp(ABC)$ .



**Ví dụ 10:** Cho hình vuông ABCD, H là trung điểm của AB, K là trung điểm của AD. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại H lấy một điểm S khác với H. Chứng minh:

a) đường thẳng AC vuông góc với mp(SHK)

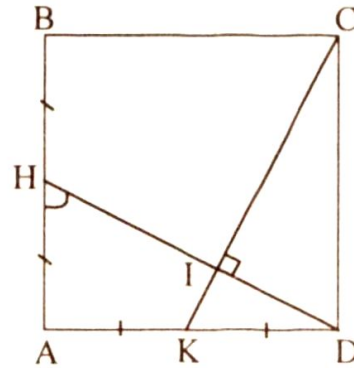
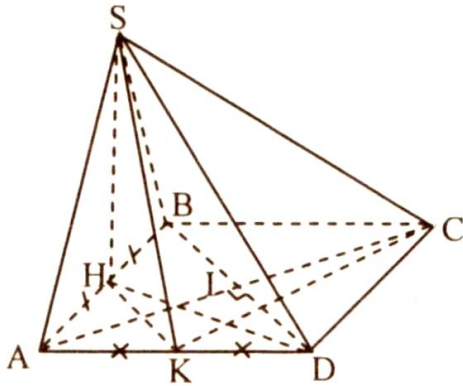
b) đường thẳng CK vuông góc với đường thẳng DH, SD.



**Giải:**

a) Theo giả thiết, ta có:  $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AC$

Ta lại có:  $AC \perp BD, HK \parallel BD \Rightarrow AC \perp HK$



b) Gọi I là giao điểm của DH và CK.

Ta có:  $\Delta HAD = \Delta KDC \Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{DKC} \Rightarrow \widehat{CID} = 1v$

$\Rightarrow CK \perp DH$ , mặt khác, vì  $SH \perp (ABCD)$  nên DH là hình chiếu của SD do đó:  $CK \perp SD$ .

**Ví dụ 11:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên  $CC'$  vuông góc với đáy và  $CC' = a$ .

a) Gọi I, M là trung điểm của BC,  $BB'$ . Chứng minh AI vuông góc với  $BC'$  và  $BC'$  vuông góc với AM.

b) Gọi K là điểm trên đoạn  $A'B'$  sao cho  $B'K = \frac{a}{4}$  và J là trung điểm của  $B'C'$ . Chứng minh AM vuông góc với KJ.

**Giải:**

a) Tam giác đều ABC nên trung tuyến  $AI \perp BC$ . Theo giả thiết, ta có:  $CC' \perp (ABC)$ .

Do đó:  $CC' \perp AI$

Suy ra:  $AI \perp (BCC')$ . Vậy  $AI \perp BC'$

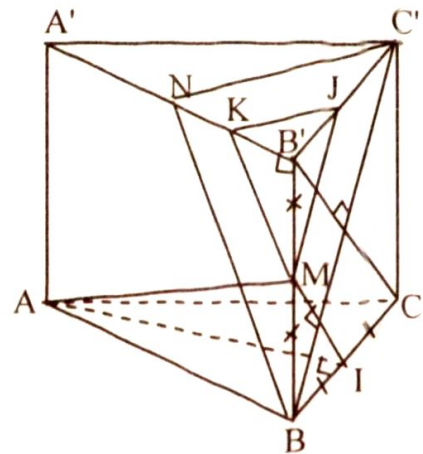
Ta đã có:  $BC' \perp AI$ . Mặt khác,  $BCC'B'$  là hình vuông cạnh a nên  $BC' \perp CB'$ . IM là đường trung bình của tam giác  $BCB'$  nên  $IM \parallel CB'$ .

Từ đó ta có:  $BC' \perp IM$ . Ta suy ra:  $BC' \perp (AIM)$ . Vậy:  $BC' \perp AM$ .

b) Hình chiếu AM lên  $(A'B'C')$  là  $A'B'$ . Tam giác  $A'B'C'$  đều nên  $C'N \perp A'B'$  mà  $JK \parallel C'N$  nên  $JK \perp A'B'$ . Vậy  $AM \perp JK$ .

**Ví dụ 12:** Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD tâm O và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi H, I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC và SD. Chứng minh:

a)  $BC \perp (SAB)$ ,  $CD \perp (SAD)$  và  $BD \perp (SAC)$ .





b) Bốn điểm A, H, I, K đồng phẳng và  $HK \perp AI$ .

**Giải**

- a) Vì đáy ABCD là hình vuông nên  $BC \perp BA$ ,  
mà  $BC \perp SA$  do đó  $BC \perp (SAB)$   
Tương tự  $CD \perp AD$  và  $CD \perp SA$  nên  
 $CD \perp (SAD)$ .

Ta có  $BD \perp AC$  vì đáy ABCD là hình vuông và  
 $BD \perp SA$  nên  $BD \perp (SAC)$ .

- b)  $BC \perp (SAB)$  mà  $AH \subset (SAB)$  nên  $BC \perp AH$  và theo giả thiết  $SB \perp AH$   
ta suy ra  $AH \perp (SBC)$ . Vì  $SC \subset (SBC)$  nên  $AH \perp SC$ .

Tương tự  $AK \perp SC$  mà  $AI \perp SC$  nên A, H, I, K nằm trong mặt phẳng đi  
qua điểm A và vuông góc với SC.

Ta có  $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB, SA \perp AD$ .

Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau vì chúng có cạnh SA chung  
và  $AB = AD$ . Do đó  $SB = SD, SH = SK$  nên  $HK \parallel BD$ .

Vì  $BD \perp (SAC)$  nên  $HK \perp (SAC)$  và do đó  $HK \perp AI$ .

**Ví dụ 13:** a) Cho tứ diện ABCD có  $AB \perp CD, AC \perp BD$ . Chứng minh rằng  
 $AD \perp BC$ . Vậy, các cạnh đối diện của tứ diện đó vuông góc với nhau. Tứ  
diện như thế gọi là tứ diện trực tâm.

b) Chứng minh các mệnh đề sau đây là tương đương:

(i) ABCD là tứ diện trực tâm.

(ii) Chân đường cao của tứ diện hạ từ một đỉnh trùng với trực tâm của  
mặt đối diện.

(iii)  $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$

c) Chứng minh rằng bốn đường cao của tứ diện trực tâm đồng quy tại  
một điểm. Điểm đó gọi là trực tâm của tứ diện nói trên.

**Giải**

- a) Hạ đường cao  $BB_1$  và  $CC_1$  của tam  
giác BCD, gọi H là trực tâm của tam  
giác đó. Vì  $AB \perp CD, BB_1 \perp CD$  nên  
 $CD \perp AH$ . Tương tự  $BD \perp AH$ .  
Do đó  $AH \perp BC$  mà  $DH \perp BC$ .  
Do đó  $BC \perp AD$ .

- b) Chứng minh (i)  $\Leftrightarrow$  (ii)

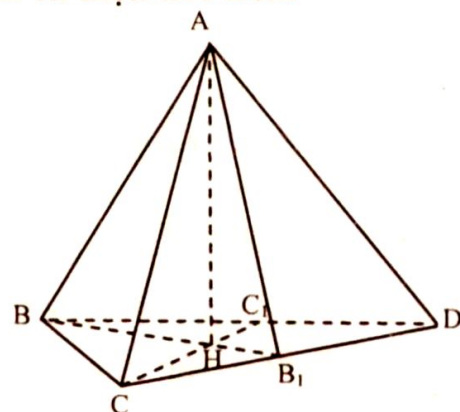
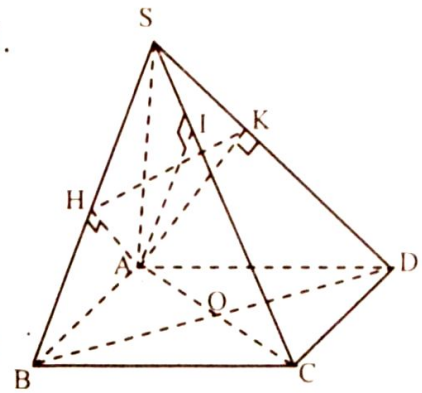
Hạ  $AA' \perp (BCD)$  thì A' là hình chiếu của A lên mp(BCD).

Nếu  $AB \perp CD, AC \perp BD$  thì  $BA' \perp CD, CA' \perp BD$ .

Vậy A' là trực tâm tam giác BCD.

Ngược lại, nếu A' là trực tâm tam giác BCD thì  $BA' \perp CD$ , từ đó suy ra  
 $AB \perp CD$ . Tương tự, ta cũng có  $AC \perp BD$ .

Từ câu a) và kết quả trên, ta suy ra: đpcm.





– Chứng minh (i)  $\Leftrightarrow$  (iii). Ta có:

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2$$

$$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0$$

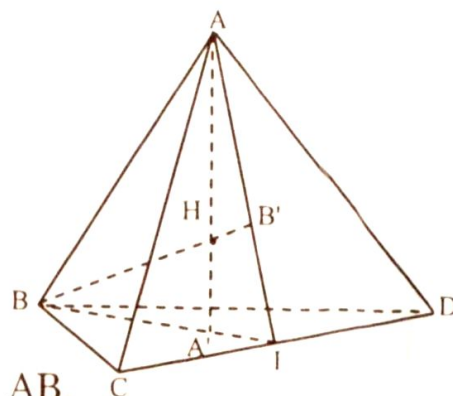
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow AD \perp BC.$$

Tương tự:  $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow DC \perp AB.$

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow DB \perp AC.$$

- c) Vì ABCD là tứ diện trực tâm nên nếu vẽ các đường cao AA' và BB' của tứ diện thì A', B' lần lượt là trực tâm của tam giác BCD và ACD. Khi đó BA', AB' và CD đồng quy tại I. Như vậy AA', BB' là hai đường cao của tam giác ABI nên AA' và BB' cắt nhau. Tương tự, nếu kẻ đường cao CC' của tứ diện thì ta cũng có AA', CC' cắt nhau và BB', CC' cắt nhau. Mặt khác, AA', BB', CC' không cùng nằm trong một mặt phẳng nên AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm.

Tương tự ta có AA', BB', DD' đồng quy (DD' là đường cao của tứ diện ABCD). Vậy, khi ABCD là tứ diện trực tâm thì các đường cao AA', BB', CC', DD' đồng quy tại một điểm.



## DẠNG 2: GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẺANG VÀ MẶT PHẺANG

Cho đường thẳng d và mặt phẳng ( $\alpha$ ):

– Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng ( $\alpha$ ) thì góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng ( $\alpha$ ) bằng  $90^\circ$ .

– Nếu đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng ( $\alpha$ ) thì góc giữa d và hình chiếu d' của nó trên ( $\alpha$ ) là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng ( $\alpha$ ).

Chú ý:

– Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng không vượt quá  $90^\circ$ .

– Việc tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng được quy về tính góc giữa hai đường thẳng. Góc này, các phương pháp tính đã nêu ở phần trước, tuy nhiên cần xác định được đường thẳng hình chiếu lên mặt phẳng.

**Ví dụ 1:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh a,  $SA \perp mp(ABCD)$

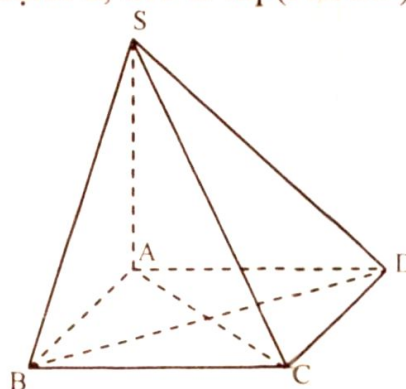
và  $SA = a\sqrt{2}$ . Tính góc giữa:

a) Đường thẳng SC, SD với mp(ABCD).

b) Đường thẳng BD với mp(SAC).

**Giải**

- a) Ta có AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (ABCD) nên góc giữa đường thẳng SC với mp(ABCD) là góc giữa đường thẳng SC





và AC. Tam giác vuông SAC có  $AC = a\sqrt{2}$ ,

$SA = a\sqrt{2}$  nên là tam giác vuông cân tại A.

Vậy góc giữa SC và mặt phẳng (ABCD) bằng  $45^\circ$ .

– Ta có AD là hình chiếu của SD lên mp(ABCD) nên góc giữa SD với mp(ABCD) là góc giữa đường thẳng SD và AD, đặt bằng  $\varphi$ .

Tam giác SAD vuông tại A:  $\tan \varphi = \frac{SA}{AD} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ .

b) Ta có  $SA \perp mp(ABCD)$  nên  $SA \perp BD$  và ABCD là hình vuông nên  $AC \perp BD$ , do đó  $BD \perp mp(SAC)$ . Vậy góc giữa đường thẳng BD và mp(SAC) bằng  $90^\circ$ .

**Ví dụ 2:** Cho tứ diện đều ABCD. Tính góc giữa đường thẳng AB và mp(BCD).

**Giải**

Hạ  $AH \perp mp(BCD)$ .

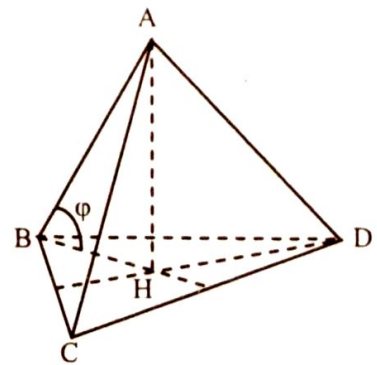
Vì  $AB = AC = AD \Rightarrow HB = HC = HD$ .

nên H là tâm của tam giác đều BCD.

Ta có BH là hình chiếu của AB lên mp(BCD) nên góc giữa đường thẳng AB với mp(BCD) là góc  $\varphi$  giữa đường thẳng AB và BH.

Gọi a là cạnh tứ diện đều. Tam giác ABH vuông:

$$\cos \varphi = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



**Ví dụ 3:** Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a và

$$SA = SB = SC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC)

b) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC).

**Giải:**

1) Gọi O là hình chiếu của S trên (ABC).

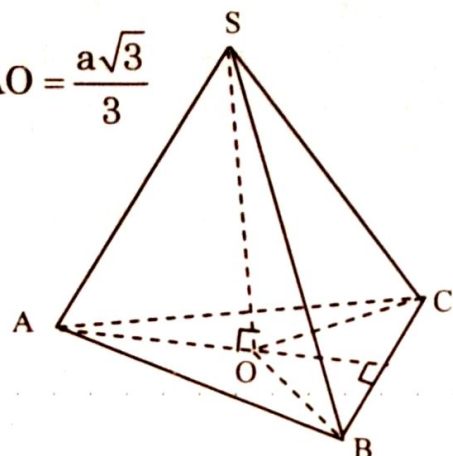
Vì  $SA = SB = SC$  nên  $OA = OB = OC$ .

Do đó O là tâm của tam giác đều ABC và  $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow SO^2 = SA^2 - AO^2 = \frac{12a^2}{9} - \frac{3a^2}{9} = a^2$$

$$\Rightarrow SO = a$$

2) Ta có AO là hình chiếu của AS trên (ABC) nên góc giữa SA và (ABC) là góc SAO.





$$\text{Ta có: } \tan \widehat{SAO} = \frac{SO}{AO} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } \widehat{SAO} = 60^\circ.$$

**Ví dụ 4:** Cho tam giác ABC vuông góc tại A, cạnh AB = a và nằm trong mặt phẳng  $\alpha$ , cạnh AC =  $a\sqrt{2}$  và tạo với  $\alpha$  một góc  $60^\circ$ . Tính góc hợp bởi BC với  $\alpha$ .

**Giải:**

$$\text{Ta có: } BC = a\sqrt{3}$$

Gọi H là hình chiếu của C trên  $\alpha$  thì  $\widehat{CAH} = 60^\circ$ .

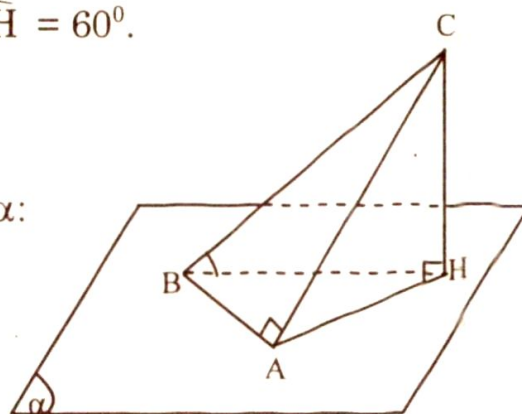
$$CH = AC \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Ta có  $\widehat{CBH}$  là góc của cạnh BC tạo với  $\alpha$ :

Tam giác vuông CBH :

$$\sin \widehat{CBH} = \frac{CH}{BC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy góc } \widehat{CBH} = 45^\circ.$$



**Ví dụ 5:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông, cạnh bên SA = SB = SC = SD = b cùng hợp với đáy góc  $60^\circ$ .

Gọi I là trung điểm của CD. Tính góc hợp bởi đường thẳng:

a) SC với mp(SBD)

b) SI với mp(SAB).

**Giải**

a) Hạ  $SO \perp mp(ABCD)$ .

$$\text{Vì } SA = SB = SC = SD$$

$\Rightarrow OA = OB = OC = OD$  nên O là tâm của hình vuông đáy, góc  $\widehat{SCO} = 60^\circ$ .

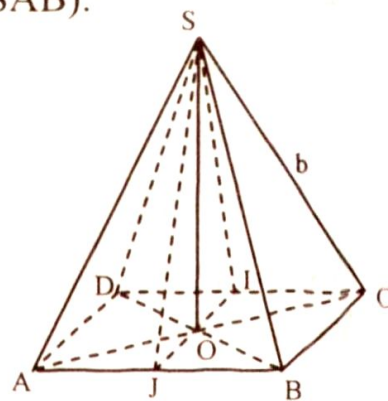
$$\text{Ta có: } SO \perp OC, BD \perp OC$$

$\Rightarrow OC \perp mp(SBD)$  nên SO là hình chiếu của SC lên mp(SBD).

Tam giác vuông SOC có góc C =  $60^\circ$  nên góc S =  $30^\circ$ .

Vậy góc giữa đường thẳng SC với mp(SBD) bằng  $30^\circ$ .

b) Gọi J là trung điểm của AB. Ta có  $IJ \perp AB$  mà  $SO \perp AB$  nên  $AB \perp mp(SIJ)$ , do đó hình chiếu của đường thẳng SI lên mp(SAB) là đường thẳng SJ.





Hình vuông ABCD có đường chéo  $AC = SA = SB = b$  nên  $IJ = BC = \frac{b}{\sqrt{2}}$ ,

tam giác đều SAC có đường cao  $SO = \frac{b\sqrt{3}}{2}$ .

Gọi  $\varphi$  là góc giữa đường thẳng SI và SJ, tam giác vuông SOI:

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{OI}{SO} = \frac{\frac{b}{2\sqrt{2}}}{\frac{b\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

**Ví dụ 6:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Hãy tính góc của đường thẳng:

a) AB' và BC' ; AC' và CD'

b) IK với mp(A'B'C'D'), trong đó I, K là trung điểm của BC, A'D'.

**Giải**

a) Ta có  $AB' \parallel DC'$  nên góc  $\alpha$  giữa AB' và BC' là góc giữa DC' và BC'. Vì tam giác BC'D đều nên  $\alpha = 60^\circ$ .

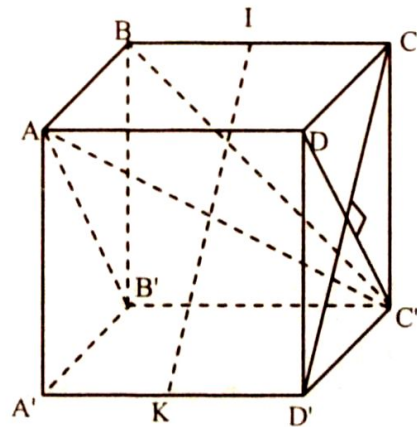
Ta có:  $CD' \perp C'D$  và  $CD' \perp AD$  nên  $CD' \perp (ADC'B')$ .

Do đó  $CD' \perp AC'$ .

Vậy góc giữa AC' và CD' bằng  $90^\circ$ .

b) Ta có  $IK \parallel CD'$  nên góc giữa đường thẳng IK với mp(A'B'C'D') là góc giữa CD' với mp(A'B'C'D').

Hình chiếu CD' lên mp(A'B'C'D') là D'C'. Vì DCC'D' là hình vuông nên góc cần tìm bằng  $45^\circ$ .



### DẠNG 3: THIẾT DIỆN VUÔNG GÓC

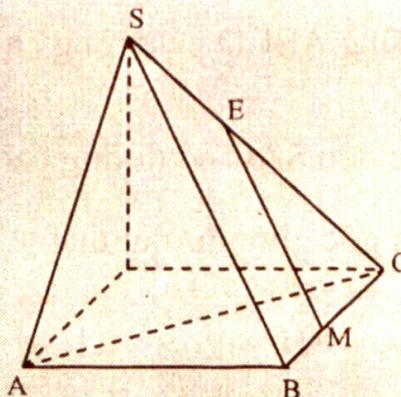
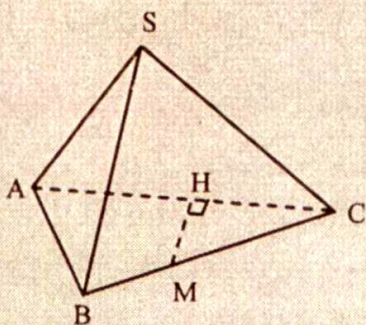
Mặt phẳng (P) cắt một số cạnh của khối đa diện tạo thành đỉnh đa giác thiết diện, cắt một số mặt của khối đa diện tạo thành cạnh của đa giác thiết diện.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với AC của khối đa diện:

– Nếu có mặt chứa M và AC thì hạ MH vuông góc với AC, H thuộc đường thẳng AC. Điểm H là một đỉnh của thiết diện, từ đó vẽ tiếp thiết diện.

– Nếu có cạnh SB vuông góc với AC thì  $SB \parallel (P)$  hoặc  $SB \subset (P)$ . Lúc đó (P) cắt mặt chứa M theo giao tuyến song song với SB. Nếu có 2 đường thẳng  $d_1, d_2$  cùng vuông góc với AC thì (P) là mặt phẳng qua M, song song với  $d_1, d_2$ .





Chú ý: Các chân đường cao đặc biệt của tam giác cân, tam giác đều, tam giác vuông cân, ....

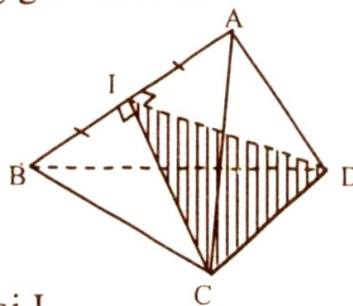
**Ví dụ 1:** Cho tứ diện đều ABCD. Xác định thiết diện cắt tứ diện bởi mặt phẳng (P) qua trung điểm I của AB và vuông góc với AB.

**Giải**

Tứ diện ABCD đều nên tam giác ABC, ABD đều do đó  $CI \perp AB$ ,  $DI \perp AB$  nên  $AB \perp (ICD)$ .

Ta có mp(P) chính là mp(ICD).

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác ICD cân tại I.



**Ví dụ 2:** Tam giác ABC có  $BC = 2a$  và đường cao  $AD = a$ . Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A, lấy điểm S sao cho  $SA = a\sqrt{2}$ . Gọi E và F lần lượt là trung điểm của SB và SC.

a) Chứng minh BC vuông góc với (SAD).

b) Gọi H là hình chiếu của A trên EF. Chứng minh AH nằm trên (SAD).  
Hãy cho biết vị trí của điểm H đối với hai điểm S và D.

c) Tính diện tích của tam giác AEF.

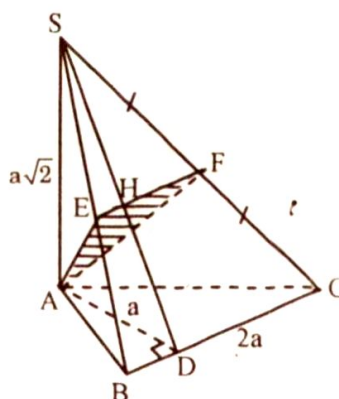
**Giải**

a)  $BC \perp AD, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAD)$

b) Ta có:  $AH \perp EF, EF \parallel BC$   
 $\Rightarrow AH \perp BC$

Như vậy, ta có:  $AH \perp BC, (SAD) \perp BC$   
 $\Rightarrow AH \subset (SAD)$ .

Điểm H vừa thuộc mặt phẳng (SAD), vừa thuộc mặt phẳng (SBC), (vì  $H \in EF$ ) nên  $H \in SD$ . Vì EF là đường trung bình của tam giác SBC nên H là trung điểm của SD.



c) Ta có:  $S_{AEF} = \frac{1}{2} AH \cdot EF$  mà  $EF = \frac{1}{2} BC = a$



và  $AH = \frac{1}{2}SD$  với  $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{3}$ .

Ta suy ra:  $S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

**Ví dụ 3:** Tứ diện  $SABC$  có  $ABC$  là tam giác vuông cân đỉnh  $B$ ,  $AB = a$ ,  $SA$  vuông góc với  $(ABC)$ ,  $SA = a$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua trung điểm  $M$  của  $AB$  và vuông góc với  $SB$ .

- Xác định mặt phẳng  $(\alpha)$ .
- $(\alpha)$  cắt tứ diện  $SABC$  theo thiết diện là hình gì?
- Tính diện tích của thiết diện

**Giải**

- Hạ  $AH \perp SB$

Vì  $AS = AB = a$ , nên  $H$  là trung điểm của  $SB$ . Dựng  $MN \parallel AH$ ,  $N$  là trung điểm của  $BH$  thì  $MN \perp SB$ .

Mặt khác, ta có:  $BC \perp (SAB)$

$$\Rightarrow BC \perp SB.$$

Dựng  $MQ \parallel BC$  ( $Q \in AC$ )

$\Rightarrow MQ \perp SB$ , ta suy ra  $(\alpha)$  là mặt phẳng  $(MNQ)$ .

- Ta có  $(MNQ) \parallel BC \Rightarrow (MNQ)$  cắt  $(SBC)$  theo giao tuyến  $NP$  song song với  $BC$  (với  $P \in SC$ ). Nối  $PQ$  ta được thiết diện là hình thang  $MNPQ$ . Vì  $MQ \parallel BC$  nên  $MQ \perp (SAB)$ , do đó  $MQ \perp MN$ . Vậy thiết diện là hình thang vuông tại  $M$  và  $N$ .

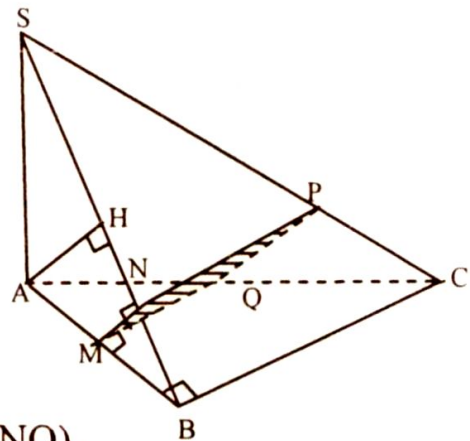
$$c) \text{ Ta có: } MQ = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}, \frac{NP}{BC} = \frac{SN}{SB} = \frac{3}{4} \Rightarrow NP = \frac{3}{4}a$$

$$MN = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{4}SB = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

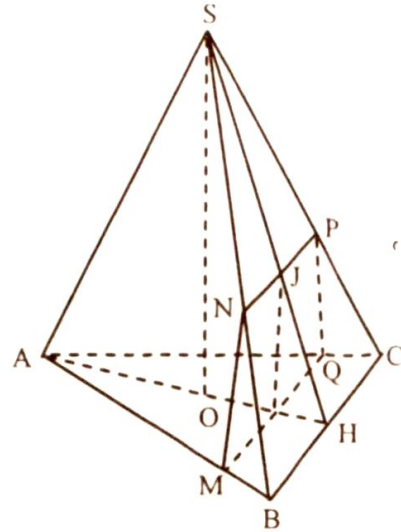
$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MQ + NP) \cdot MN = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{4}\right) \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{5a^2\sqrt{2}}{32}.$$

**Ví dụ 4:** Cho tam giác đều  $ABC$  có đường cao  $AH = 2a$ . Gọi  $O$  là trung điểm của  $AH$ . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  tại  $O$ , lấy điểm  $S$  sao cho  $OS = 2a$ . Gọi  $I$  là một điểm trên  $OH$ , đặt  $AI = x$ ,  $a < x < 2a$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua  $I$  và vuông góc với đường thẳng  $OH$ .

- Xác định mặt phẳng  $(\alpha)$ .
- Dựng thiết diện của  $(\alpha)$  với tứ diện  $SABC$ . Thiết diện là hình gì?
- Tính theo  $a$  và  $x$  diện tích của thiết diện. Với  $x$  nào thì diện tích thiết diện lớn nhất.



**Giải**



a) Ta có:  $BC \perp OH$

Qua I, dựng  $MQ \parallel BC$  ( $M \in AB$ ,  $Q \in AC$ ) thì  $MQ \perp OH$ . Mặt khác, ta có:  $SO \perp OH$ .

Dựng  $IJ \parallel OS$  ( $J \in SH$ ) thì  $IJ \perp OH$ .

Do đó mp( $\alpha$ ) là mặt phẳng (JMQ).

b) Ta có:  $MQ \parallel BC \Rightarrow (\alpha) \parallel BC$

$\Rightarrow (\alpha)$  cắt (SBC) theo giao tuyến qua J và song song với BC.

Do đó, qua J dựng đường thẳng song song với BC, cắt SB và SC tại N và P ta được MNPQ là thiết diện cần dựng.

Vì  $NP \parallel MQ \parallel BC$  nên MNPQ là hình thang.

Ta có:  $OB = OC \Rightarrow \triangle SOB = \triangle SOC \Rightarrow SB = SC \Rightarrow \triangle SAB = \triangle SAC$   
 $\Rightarrow \widehat{SBA} = \widehat{SCA}$ .

Ta cũng có:  $BN = CP$ ,  $BM = CQ$ , do đó:  $\triangle BMN = \triangle CQP$ .

Do đó:  $MN = QP$ . Vậy thiết diện là hình thang cân.

c) Do  $AH = 2a$ , ta tính được  $BC = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$

$$\frac{MQ}{BC} = \frac{AI}{AH} = \frac{x}{2a} \Rightarrow MQ = \frac{x}{2a} \cdot \frac{4a\sqrt{3}}{3} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{NP}{BC} = \frac{SJ}{SH} = \frac{OI}{OH} = \frac{x-a}{a} \Rightarrow NP = \frac{x-a}{a} \cdot \frac{4a\sqrt{3}}{3} = \frac{4(x-a)\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{IJ}{OS} = \frac{HI}{HO} = \frac{2a-x}{a} \Rightarrow IJ = 2(2a-x)$$

$$\begin{aligned} S_{MNPQ} &= \frac{1}{2} (MQ+NP) IJ = \frac{1}{2} \left( \frac{2x\sqrt{3}}{3} + \frac{4(x-a)\sqrt{3}}{3} \right) \cdot 2(2a-x) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} (3x-2a)(2a-x). \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si:

$$S = 2\sqrt{3} \left( x - \frac{2}{3}a \right) (2a-x) \leq 2\sqrt{3} \left( \frac{x - \frac{2}{3}a + 2a-x}{2} \right)^2 = \frac{8\sqrt{3}}{9} a^2$$

Dấu = xảy ra khi  $x - \frac{2}{3}a = 2a-x \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}a$  (chọn).



**Ví dụ 5:** Tứ diện SABC có hai mặt ABC và SBC là các tam giác đều cạnh a và

$SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , M là một điểm trên đoạn AB, đặt  $AM = x$  ( $0 < x < a$ ). Gọi  $(\alpha)$

là mặt phẳng qua M và vuông góc với BC. Gọi D là trung điểm của BC.

a) Chứng minh  $(\alpha)$  song song với (SAD).

b) Xác định thiết diện của  $(\alpha)$  với tứ diện SABC.

c) Tính theo a và x diện tích của thiết diện.

**Giải**

a) Vì ABC và SBC là các tam giác đều và D là trung điểm của BC nên:  
 $BC \perp AD, BC \perp SD$

$\Rightarrow BC \perp (SAD)$

Vì  $(\alpha) \perp BC$  nên:  $(\alpha) \parallel (SAD)$

b) Gọi N, P lần lượt là giao điểm của các cạnh SB, SC với  $(\alpha)$ .

Vì  $(\alpha) \parallel (SAD)$  nên ta có:  $MN \parallel SA$ ,  
 $NP \parallel SD$ ,  $PM \parallel AD$ .

Thiết diện của  $(\alpha)$  với tứ diện SABC là tam giác MNP.

Ta có:  $\frac{NP}{SD} = \frac{BP}{BD} = \frac{BM}{BA} = \frac{MP}{AD}$ .

Vì  $SD = AD$  nên  $NP = MP$

Vậy thiết diện MNP là tam giác cân đỉnh P.

c) Hai tam giác cân MNP và ASD đồng dạng với nhau, có tỉ số đồng dạng là  $k = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a}$ . Gọi H là trung điểm của SA.

Ta có:  $DH^2 = DA^2 - AH^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{16} = \frac{9a^2}{16} \Rightarrow DH = \frac{3a}{4}$

Do đó:  $S_{SAD} = \frac{1}{2} AS \cdot DH = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3a}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$

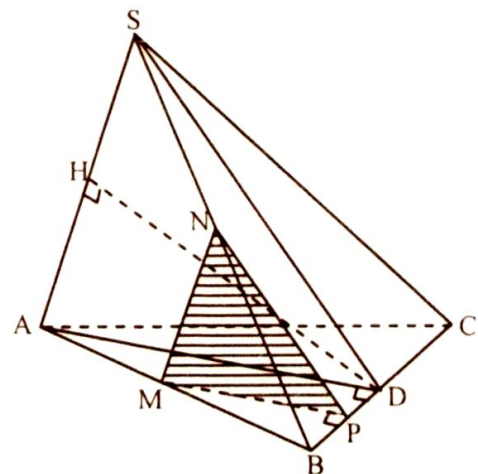
Suy ra:  $S_{MNP} = k^2 \cdot S_{SAD} = \frac{(a-x)^2}{a^2} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{3\sqrt{3}}{16} (a-x)^2$

Nhận xét: Nếu  $x = 0$  ta có M trùng với A, khi đó thiết diện có diện tích bằng diện tích tam giác SAD. Còn nếu  $x = a$  ta có M trùng với B, khi đó diện tích của thiết diện bị triệt tiêu.

**Ví dụ 6:** Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a và  $SA = SB = SC = b$ . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng  $SG \perp (ABC)$ . Tính SG.

b) Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng SC. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để (P) cắt SC tại điểm  $C_1$  nằm giữa S và C. Khi đó hãy tính diện tích thiết diện của hình chóp S.ABC khi cắt bởi mp(P).

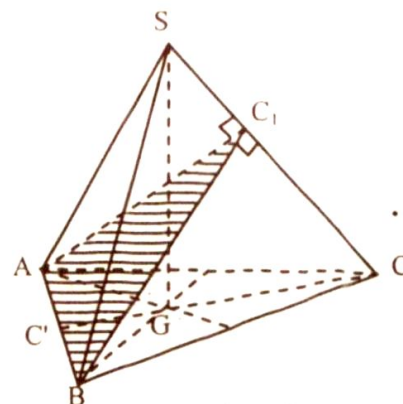


### Giải

- a) Ta có  $SA = SB = SC$  và có  $GA = GB = GC$ .  
Nên  $SG$  là trục của tam giác đều  $ABC$ .  
Vậy  $SG \perp mp(ABC)$ .

$$SG^2 = SA^2 - AG^2 = b^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\text{nên } SG = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}, \text{ (với } 3b^2 > a^2).$$



- b) Ta có  $AB \perp SC$ . Vì (P) đi qua A và vuông góc với SC nên AB nằm trong (P). Vẽ đường cao  $AC_1$  của tam giác SAC thì (P) chính là  $mp(ABC_1)$ . Do tam giác SAC cân tại S nên điểm  $C_1$  nằm trong đoạn thẳng SC khi và chỉ khi  $\widehat{ASC} < 90^\circ$ .

$\Leftrightarrow AC^2 < SA^2 + SC^2 \Leftrightarrow a^2 < 2b^2$ . Trong trường hợp này, thiết diện của hình chóp bị cắt bởi (P) là tam giác  $ABC_1$ .

$$S_{ABC_1} = \frac{1}{2} AB \cdot C'C_1 = \frac{1}{2} a \cdot C'C_1, \text{ với } C' \text{ là trung điểm của } AB.$$

$$\text{Ta có: } C'C_1 \cdot SC = SG \cdot CC'$$

$$\Rightarrow C'C_1 = \frac{SG \cdot CC'}{SC} = \frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{b} = \frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{2b}$$

$$\text{Vậy: } S_{ABC_1} = \frac{a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}}{4b}.$$

**Ví dụ 7:** Hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $2a$ ,  $SA$  vuông góc với  $(ABCD)$  và  $SA = a\sqrt{2}$ . Gọi  $AH$  là đường cao của tam giác  $SAB$ .

- a) Tính tỉ số  $\frac{SH}{SB}$  và độ dài đoạn  $AH$ .

- b) Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $\alpha$  là mặt phẳng qua  $M$  và vuông góc với  $SB$ . Mặt phẳng  $\alpha$  cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì?  
c) Tính diện tích của thiết diện.

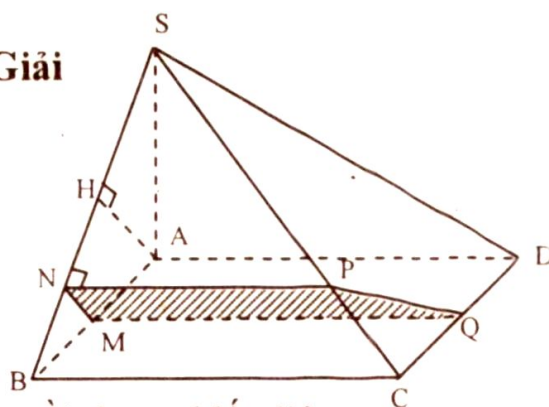
### Giải

- a) Tam giác vuông  $SAB$ , ta có:

$$SB^2 = SA^2 + AB^2 = 6a^2$$

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SH \cdot SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{1}{3}$$

$$AH = \frac{AS \cdot AB}{SB} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$



- b) Trước tiên, ta xác định mặt phẳng rồi dựng thiết diện:



Ta có:  $AH \perp SB$ . Dựng  $MN \parallel AH$ ,  $N$  là trung điểm  $BH$  thì  $MN \perp SB$  và  $NB = NH$ .

Mặt khác, ta có:  $AD \perp AB$  và  $AD \perp SA$  nên  $AD \perp SB$ .

Dựng  $MQ \parallel AD$  ( $Q \in CD$ ), thì  $MQ \perp SB$ .

Do đó, ta suy ra  $(\alpha)$  là mặt phẳng  $(MNQ)$ .

Ta có  $MQ \parallel BC \Rightarrow (\alpha) \parallel BC$  nên  $(\alpha)$  cắt  $(SBC)$  theo giao tuyến  $NP \parallel BC$ ,  $P \in SC$ . Nối  $PQ$ , ta được thiết diện là hình thang  $MNPQ$ .

Vì  $BC \perp (SAB)$  nên  $MQ \perp (SAB)$ , suy ra  $MQ \perp MN$ .

Vậy thiết diện  $MNPQ$  là hình thang vuông tại  $M$  và  $N$ .

c) Ta có:  $MQ = BC = 2a$ ;  $MN = \frac{1}{2}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\frac{NP}{BC} = \frac{SN}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow NP = \frac{4a}{3}$$

$$\text{Vậy } S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MQ + NP)MN = \frac{5a^2\sqrt{3}}{9}.$$

**Ví dụ 8:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ , tâm  $O$ . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng  $ABCD$  tại  $O$ , lấy điểm  $S$  sao cho  $SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ . Mặt

phẳng  $(\alpha)$  qua  $A$  và vuông góc với  $SC$  lần lượt cắt  $SB, SC, SD$  tại  $B', C', D'$ .

a) Tính  $AC'$ . Chứng minh  $C'$  là trung điểm của  $SC$ .

b) Chứng minh  $B'D'$  song song với  $BD$ . Từ đó suy ra cách dựng hai điểm  $B'$  và  $D'$ .

c) Chứng minh tứ giác  $AB'C'D'$  có hai đường chéo vuông góc. Tính diện tích của tứ giác này.

**Giải**

a) Ta có:  $(\alpha) \perp SC$  và  $AC' \subset (\alpha) \Rightarrow AC' \perp SC$

$$\text{Vì } OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow SC^2 = SO^2 + DC^2 = \frac{6a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} = 2a^2$$

$$\Rightarrow SC = a\sqrt{2}.$$

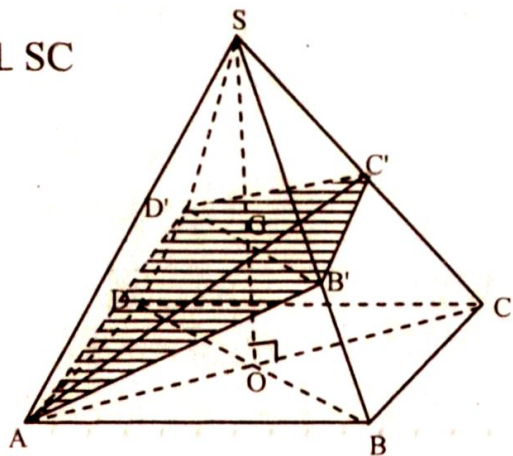
Vậy  $SAC$  là một tam giác đều.

$$\text{Do đó } AC' = SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Cách khác: Ta có thể tính  $AC'$  bằng công thức:  $AC' \cdot SC = SO \cdot AC$  từ diện tích tam giác  $SAC$ .

b) Ta có:  $BD \perp AC$ ,  $BD \perp SO \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ .

Mặt khác theo giả thiết:  $(\alpha) \perp SC$ . Vậy  $(\alpha) \parallel BD$ .



Do đó,  $(\alpha)$  cắt (SBD) theo giao tuyến  $B'D' \parallel BD$ . Ta suy ra cách dựng  $B'$  và  $D'$ .

– Dựng  $AC' \perp SC$  ( $C'$  là trung điểm của  $SC$ ),  $AC'$  cắt  $SO$  tại  $G$  ( $G$  là trọng tâm của tam giác  $SAC$ ).

– Dựng đường thẳng qua  $G$  song song với  $BD$  cắt  $SB$  và  $SD$  tại  $B'$  và  $D'$ .

c) Vì  $BD \perp (SAC)$  nên  $B'D' \perp (SAC)$ , do đó  $B'D' \perp AC'$

$$S = \frac{1}{2} AC' \cdot B'D'$$

$$\text{Ta có: } \frac{B'D'}{BD} = \frac{SG}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow B'D' = \frac{2BD}{3} = \frac{2}{3} a\sqrt{2} \Rightarrow S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$

**Ví dụ 9:** Cho hình tứ diện đều cạnh  $a$ ,  $I$  và  $K$  lần lượt là trung điểm của cạnh  $AB$  và  $CD$ , mặt phẳng  $(P)$  chứa  $IK$  cắt hình tứ diện đều theo một thiết diện, xác định vị trí của mặt phẳng  $(P)$  để thiết diện tạo thành có diện tích là nhỏ nhất; lớn nhất. Tính giá trị nhỏ nhất, lớn nhất đó.

**Giải**

Mặt phẳng  $(P)$  cắt cạnh  $BC$  tại  $E$  thì cắt cạnh  $AD$  tại  $F$  và đặt  $\overrightarrow{BE} = \alpha \overrightarrow{BC}$  thì  $\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AD}$  với  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Nếu  $\alpha = 0$  thì  $E \equiv B$  và  $F \equiv A$ , thiết diện là tam giác  $ABK$ .

Nếu  $\alpha = 1$  thì  $E \equiv C$  và  $F \equiv D$ , thiết diện là tam giác  $CID$ .

Nếu  $0 < \alpha < 1$  thì  $E$  thuộc cạnh  $BC$ ;  $F$  thuộc cạnh  $AD$  và thiết diện là tứ giác  $IEKF$ . Ta chứng minh tứ giác  $IEKF$  có hai đường chéo  $EF$ ,  $IK$  vuông góc với nhau. Chọn hệ cơ sở gốc  $B$ :  $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$

Ta có  $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CK}$

$$= -\frac{\vec{c}}{2} + \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}).$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}).$$

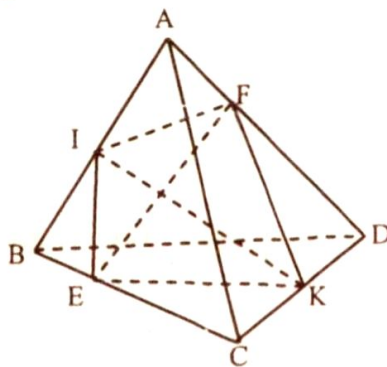
$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AF}$$

$$= -\alpha \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \alpha \overrightarrow{AD}$$

$$= -\alpha \vec{a} + \vec{c} + \alpha(\vec{b} - \vec{c}) = -\alpha \vec{a} + \alpha \vec{b} + (1 - \alpha) \vec{c}$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{EF} = \left(\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{c}\right)(-\alpha \vec{a} + \alpha \vec{b} + (1 - \alpha) \vec{c})$$

$$= -\frac{1}{2} \alpha \vec{a}^2 + \frac{1}{2} \alpha \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2} (1 - \alpha) \vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{1}{2} \alpha \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2} \alpha \vec{b}^2 \\ + \frac{1}{2} (1 - \alpha) \vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{2} \alpha \vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{1}{2} \alpha \vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{2} (1 - \alpha) \vec{c}^2$$





$$= -\frac{1}{2}\alpha a^2 + \frac{1}{4}\alpha a^2 + \frac{1}{4}(1-\alpha)a^2 - \frac{1}{4}\alpha a^2 + \frac{1}{2}\alpha a^2 + \frac{1}{4}(1-\alpha)a^2 \\ + \frac{1}{4}\alpha a^2 - \frac{1}{4}\alpha a^2 - \frac{1}{2}(1-\alpha)a^2 = 0$$

Do đó  $IK \perp EF$  nên:  $S_{IEKF} = \frac{1}{2} IK \cdot EF$ .

$$IK^2 = \frac{1}{4} (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})^2 = \frac{1}{4} [(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2) + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{c}] \\ = \frac{1}{4} (a^2 + a^2 + a^2 + a^2 - a^2 - a^2) = \frac{1}{4} (2a^2)$$

$$\Rightarrow IK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$EF^2 = (-\alpha \vec{a} + \alpha \vec{b} + (1-\alpha) \vec{c})^2 \\ = \alpha^2 \vec{a}^2 + \alpha^2 \vec{b}^2 + (1-\alpha)^2 \vec{c}^2 - 2\alpha^2 \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\alpha(1-\alpha) \vec{a} \cdot \vec{c} + 2\alpha(1-\alpha) \vec{b} \cdot \vec{c} \\ = \alpha^2 a^2 + \alpha^2 a^2 + (1-\alpha)^2 a^2 - \alpha^2 a^2 - \alpha(1-\alpha) a^2 + \alpha(1-\alpha) a^2 \\ = \alpha^2 a^2 + (1-\alpha)^2 a^2 \\ = a^2 [\alpha^2 + (1-\alpha)^2]$$

$$\Rightarrow EF = a\sqrt{\alpha^2 + (1-\alpha)^2}$$

Vì  $IK$  không đổi nên diện tích  $IEKF$  lớn nhất, nhỏ nhất khi độ dài  $EF$  lớn nhất, nhỏ nhất. Mà độ dài  $EF$  là số dương nên  $EF$  lớn nhất, nhỏ nhất khi  $EF^2$  là lớn nhất, nhỏ nhất.

Ta có  $EF^2 = f(\alpha) = a^2[\alpha^2 + (1-\alpha)^2]$  với  $0 \leq \alpha \leq 1$ .  
 $= a^2[2\alpha^2 - 2\alpha + 1]$ .

Giá trị nhỏ nhất là  $\frac{a^2}{2}$ , lớn nhất là  $a^2$ .

Với  $\alpha = \frac{1}{2}$  thì  $E$  và  $F$  là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ , thiết diện có diện tích nhỏ nhất là:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4} a^2$$

Với  $\alpha = 0$  hoặc  $\alpha = 1$  thì thiết diện có diện tích lớn nhất là:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$$

$\alpha$	0	1/2	1
$f(\alpha)$	$a^2$	$a^2/2$	$a^2$

## DẠNG 4: TOÁN TỔNG HỢP

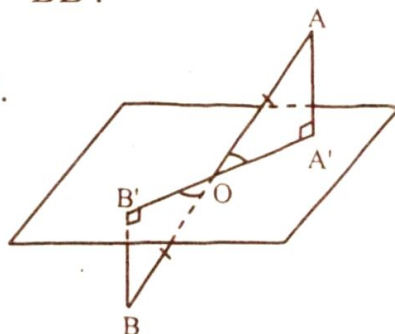
- Chứng minh 2 đoạn bằng nhau: Đưa về chứng minh 2 tam giác bằng nhau.
  - Chứng minh điểm thẳng hàng: Tìm 2 mặt phẳng phân biệt cùng chứa các điểm thì các điểm thẳng hàng trên giao tuyến.
  - Bài toán quỹ tích (tập hợp điểm): phần thuận, giới hạn và phần đảo.
- Chú ý: – Quan hệ song song và vuông góc.  
 – Mặt phẳng trung trực và trục của tam giác.  
 – Sử dụng vectơ để giải toán.

**Ví dụ 1:** Một đoạn thẳng  $AB$  không vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt mặt phẳng này tại trung điểm  $O$  của đoạn thẳng đó. Các đường thẳng vuông góc với  $(\alpha)$  qua  $A$  và  $B$  lần lượt cắt mặt phẳng  $(\alpha)$  tại  $A'$  và  $B'$ . Chứng minh ba điểm  $A', O, B'$  thẳng hàng và  $AA' = BB'$ .

**Giải**

Ta có:  $AA' \perp (\alpha), BB' \perp (\alpha) \Rightarrow AA' \parallel BB'$ .

Mặt phẳng  $(AA', BB')$  xác định bởi hai đường thẳng song song  $AA', BB'$  cắt mặt phẳng  $(\alpha)$  theo giao tuyến qua  $O, A', B'$ . Do đó ba điểm  $O, A', B'$  thẳng hàng.



Hai tam giác vuông  $OAA'$  và  $OBB'$  bằng nhau vì có một cạnh huyền và một góc nhọn bằng nhau nên  $AA' = BB'$ .

**Ví dụ 2:** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có hình chiếu của  $A'$  lên  $(ABC)$  là trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .

a) Chứng minh  $AA' \perp BC$  và  $AA' \perp B'C'$ .

b) Gọi  $MM'$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(AHA')$  với mặt bên  $BCC'B'$ , trong đó  $M \in BC$  và  $M' \in B'C'$ . Chứng minh rằng tứ giác  $BCC'B'$  là hình chữ nhật và  $MM'$  là đường cao của hình chữ nhật đó.

**Giải**

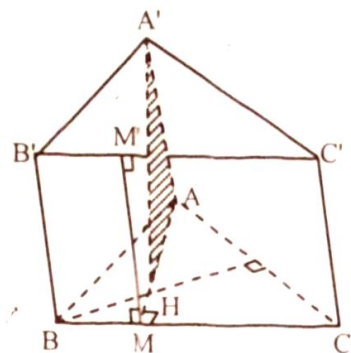
a)  $BC \perp AH$  và  $BC \perp A'H$  vì  $A'H \perp (ABC)$

$\Rightarrow BC \perp (A'HA)$

$\Rightarrow BC \perp AA'$  và  $B'C' \perp AA'$  vì  $BC \parallel B'C'$ .

b) Ta có  $AA' \parallel BB' \parallel CC'$  mà  $BC \perp AA'$  nên  $BC \perp BB'$ , do đó tứ giác  $BCC'B'$  là hình chữ nhật

Vì  $AA' \parallel (BCC'B')$  nên  $AA' \parallel MM'$  và vì  $AA' \perp BC$  nên ta suy ra  $MM' \perp BC$  và  $MM' \perp B'C'$  nên  $MM'$  là đường cao của hình chữ nhật  $BCC'B'$ .





**Ví dụ 3:** Tìm tập hợp các điểm M cách đều 2 mút của đoạn AB.

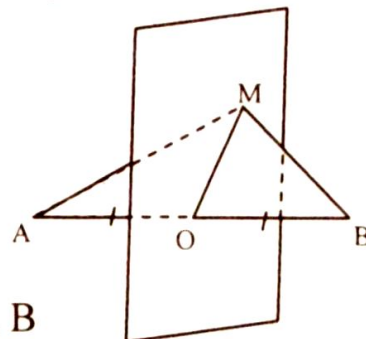
**Giải**

Gọi O là trung điểm của đoạn AB thì O là một điểm thoả mãn  $OA = OB$ .

Xét M không trùng O thì tam giác MAB có  $MA = MB$  (cân tại M)

$\Leftrightarrow MO$  vuông góc với AB.

Vì O cố định nên tập hợp các điểm M cách đều A, B là mặt phẳng vuông góc với AB tại O, gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.



**Ví dụ 4:** Tìm tập hợp các điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC.

**Giải**

Hạ MH vuông góc với mp(ABC) tại H. Các tam giác vuông MAH, MBH, MCH có MH chung.

Ta có:  $MA = MB = MC$

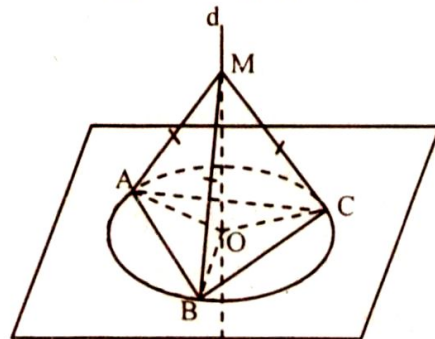
$\Leftrightarrow HA = HB = HC \Leftrightarrow H$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cố định.

Vậy, tập hợp các điểm M cách đều ba đỉnh của tam giác ABC là đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó, gọi là trục của tam giác ABC.

Cách khác:

$$MA = MB = MC \Leftrightarrow \begin{cases} MA = MB \\ MA = MC \end{cases}$$

Đưa về M thuộc giao tuyến của 2 mặt phẳng trung trực của 2 cạnh AB và AC.



**Ví dụ 5:** Cho tam giác ABC.

a) Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho  $MA \perp BC$ .

b) Tìm tập hợp các điểm N trong không gian sao cho:  $NA \perp BC$ ;  $NB \perp CA$ ,  $NC \perp AB$ .

**Giải**

a) Ta có  $MA \perp BC$  mà A, B, C cố định nên:

Tập hợp các điểm M là mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với BC.

b) Hạ  $NH \perp (ABC)$ , vì  $NA \perp BC$  nên  $HA \perp BC$ . Tương tự  $HB \perp CA$ , do đó H là trực tâm của tam giác ABC cố định.

Vậy tập hợp các điểm N là đường thẳng đi qua trực tâm H của tam giác ABC và vuông góc với mp(ABC).

**Ví dụ 6:** Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian thoả mãn mỗi hệ thức sau:

a)  $\overline{AB} \cdot \overline{CM} = \overline{CB} \cdot \overline{AM}$  (1)

b)  $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$  (2)

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } (1) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM}) = \overrightarrow{CB}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow MB \perp AC. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với đường thẳng AC.

b) Gọi G là trọng tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Từ đó:

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB})^2 = 2(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC})^2 \\ &\Leftrightarrow OM^2 + OA^2 - 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} + OM^2 + OB^2 - 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &\quad = 2OM^2 + 2OC^2 - 4\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}) = 0 \text{ (vì } OA = OB = OC) \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{OM}(3\overrightarrow{OG} - 3\overrightarrow{OC}) = 0 \\ &\Leftrightarrow 6\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{CG} = 0 \Leftrightarrow MO \perp CG. \end{aligned}$$

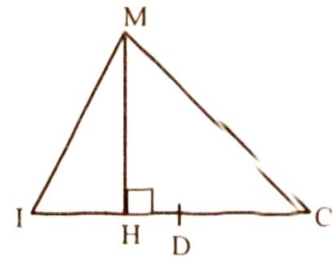
Vậy tập hợp các điểm M là mặt phẳng đi qua O và vuông góc với đường thẳng CG.

Cách khác: Gọi I là trung điểm của AB, bài toán đưa về tìm tập hợp các điểm M sao cho  $MI^2 - MC^2 = k$ .

Gọi D là trung điểm của IC, H là hình chiếu của M lên đường thẳng IC, ta có:

$$MI^2 - MC^2 = 2\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{DH} = k.$$

Do đó H cố định nên tập hợp các điểm M là mặt phẳng vuông góc với đường thẳng IC tại H.

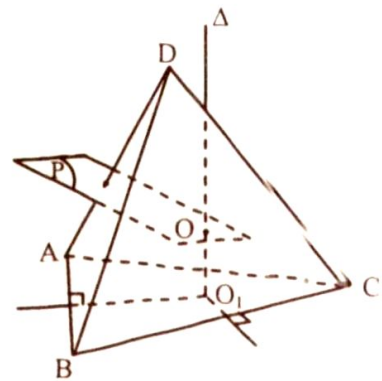


**Ví dụ 7:** Cho tứ diện ABCD. Tìm điểm O cách đều bốn đỉnh của tứ diện

**Giải**

$$\text{Ta có: } OA = OB = OC = OD \Leftrightarrow \begin{cases} OA = OD \\ OA = OB = OC \end{cases}$$

Tập các điểm cách đều ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC là đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với mp(ABC) tại tâm  $O_1$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của DA thì (P) cắt  $\Delta$  tại điểm O, đó là điểm cách đều bốn đỉnh A, B, C, D.



Để ý mp(P) phải cắt  $\Delta$  vì nếu  $\Delta \parallel (P)$  hoặc  $\Delta \subset (P)$  thì  $DA \perp (P)$  suy ra  $DA \perp \Delta$  khi ấy DA nằm trong mp(ABC), mâu thuẫn với giả thiết A, B, C, D không đồng phẳng nên  $\Delta$  cắt (P).

$$\text{Cách khác: } OA = OB = OC = OD \Leftrightarrow \begin{cases} OA = OB = OD \\ OA = OB = OC \end{cases}$$



Điểm O là giao điểm của 2 trục của 2 tam giác ABD, ABC. Đề ý 2 trục này thuộc mặt phẳng trung trực của cạnh AB.

**Ví dụ 8:** Cho hình tứ diện ABCD có AB, BC, CD đôi một vuông góc và  $AB = a, BC = b, CD = c$ .

a) Tính độ dài AD.

b) Chỉ ra điểm cách đều A, B, C, D.

**Giải**

a) Vì  $AB \perp BC$  và  $AB \perp CD$  nên  $AB \perp mp(BCD)$ .

Mặt khác  $BC \perp CD$  nên đường xiên  $AC \perp CD$ .

Ta có  $AD^2 = AC^2 + CD^2$

$$= AB^2 + BC^2 + CD^2$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

b) Vì  $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$  nên gọi O là trung điểm của AD thì trung tuyến

$$OB = \frac{AD}{2} = OA = OD, OC = \frac{AD}{2} = OA = OD$$

Do đó  $OA = OB = OC = OD$ . Vậy O cách đều 4 đỉnh.

**Ví dụ 9:** Cho tam giác ABC vuông tại C. Trên nửa đường thẳng At vuông góc với mặt phẳng (ABC) ta lấy một điểm S. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC.

a) Tìm tập hợp các điểm H và K khi S di động trên At.

b) Chứng minh AK vuông góc với (SBC) và KH vuông góc với SB.

c) Khi S di động trên At, chứng minh rằng đường thẳng HK đi qua một điểm cố định.

**Giải**

a) Thuận: Gọi  $\alpha$  là mặt phẳng (At; C),

ta có:  $K \in \alpha$  và  $\widehat{AKC} = 90^\circ$ .

Vậy K ở trên đường tròn (L) đường kính AC nằm trong mặt phẳng  $\alpha$ .

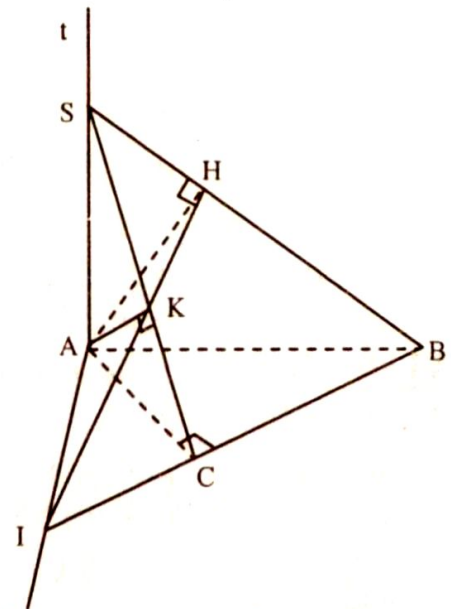
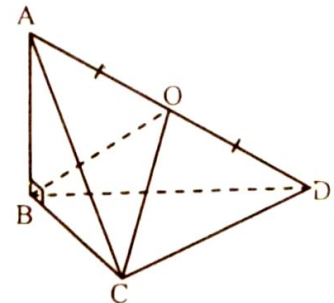
Giới hạn: Ứng với mỗi điểm S trên At, ta xác định điểm K trên (L) là giao điểm của (L) và CS.

Khi S ở tại A thì K ở tại A. Khi S chạy xa ra vô tận trên At thì K tiến tới điểm C nhưng không trùng với C trên nửa đường tròn  $(L_1)$  của (L).

Nửa đường tròn  $(L_1)$  và At ở cùng một phía đối với đường thẳng AC.

Đảo lại: Gọi K là điểm tùy ý trên  $(L_1)$  và khác với C. CK cắt At tại S. Ta có  $AK \perp CS$ . Vậy K là hình chiếu của A trên SC.

Vậy tập hợp các điểm K là nửa đường tròn  $(L_1)$  đường kính AC nằm trong mặt phẳng (C, At) và nằm về phía nửa đường thẳng At, trừ điểm C.



ABC



Tương tự, tập hợp các điểm H là nửa đường tròn đường kính AB nằm trong mặt phẳng (B; At) và nằm về phía nửa đường thẳng At, trừ điểm B.

b) Ta có:  $BC \perp AC, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AK$ .

mà  $AK \perp SC$  nên  $AK \perp (SBC)$

Do đó:  $AK \perp SB$  mà  $AH \perp SB$  nên  $SB \perp (AHK)$ . Do đó:  $SB \perp HK$ .

c) Gọi I là giao điểm của BC và HK.

Ta có:  $AI \subset (AHK) \Rightarrow AI \perp SB$ , ta có:  $AI \subset (ABC) \Rightarrow AI \perp SA$ .

Suy ra:  $AI \perp (SAB) \Rightarrow AI \perp AB$ .

Trong mặt phẳng (ABC), đường thẳng AI vuông góc với AB tại A nên AI cố định. Vì đường thẳng BC cũng cố định nên I là điểm cố định. Vậy đường thẳng HK qua I cố định khi S di động trên At.

**Ví dụ 10:** Cho tam giác đều ABC. Trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng (ABC), lấy một điểm S di động. Gọi K là trung điểm của SC.

a) Chứng minh rằng khi S di động, đường thẳng BK luôn luôn nằm trong một mặt phẳng cố định.

b) Tìm tập hợp các hình chiếu của điểm A trên BK khi điểm S di động trên tia Ax.

**Giải**

a) Gọi O là trung điểm của AC

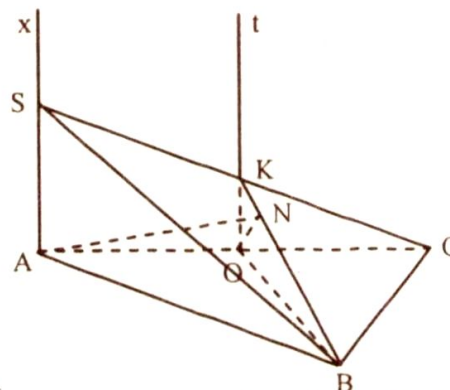
Ta có  $OK \parallel AS$ . Vậy K ở trên đường thẳng  $Ot \parallel Ax$ , Ot cố định. Vậy BK nằm trong mặt phẳng cố định (B, Ot)

b) Ta có:  $AO \perp OB, AO \perp Ot$

$\Rightarrow AO \perp (B, Ot)$

Gọi N là hình chiếu của A trên BK. Vì  $AN \perp BK$  nên theo định lý ba đường vuông góc ta có:  $ON \perp BK$ . Do đó  $\widehat{ONB} = 1v$ .

Ta suy ra tập hợp các điểm N là nửa đường tròn đường kính OB, trừ điểm B nằm trong mặt phẳng (B, Ot).



**Ví dụ 11:** Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với (ABCD) và  $SA = a$ . Gọi M là điểm di động trên đoạn CD, ta đặt  $CM = x$ . Gọi K là hình chiếu của S trên BM.

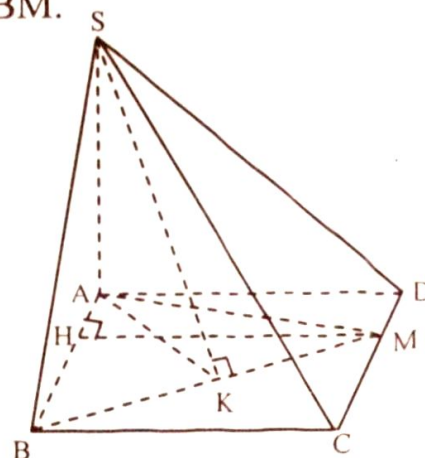
a) Tính độ dài đoạn SK theo a và x.

b) Tìm tập hợp các điểm K thỏa các tính chất nêu ở trên.

**Giải**

a) Ta có:  $S_{AMB} = \frac{1}{2} AB \cdot MH = \frac{1}{2} a^2$

$$\Rightarrow AK = \frac{2S_{AMB}}{BM} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$





$$SK^2 = SA^2 + AK^2 \Rightarrow SK = a\sqrt{\frac{2a^2 + x^2}{a^2 + x^2}}.$$

- b)  $\widehat{AKB} = 90^\circ$ , do đó K ở trên đường tròn đường kính AB trong mặt phẳng (ABCD). Mặt khác vì M di động trên đoạn CD nên điểm K luôn luôn nằm trong góc  $\widehat{CBD}$ . Do đó điểm K ở trên cung OB với O là tâm của hình vuông ABCD.

Đảo lại, ta chứng minh mọi điểm K thuộc cung OB đều thoả điều kiện của bài toán. Vậy tập hợp các điểm K cần tìm là cung OB của đường tròn đường kính AB trên mp(ABCD):

**Ví dụ 12:** Cho mặt phẳng  $(\alpha)$  và một điểm O ngoài  $(\alpha)$ . A là một điểm cố định thuộc  $(\alpha)$  sao cho OA không vuông góc với  $(\alpha)$ , d là một đường thẳng di động trong  $(\alpha)$  nhưng luôn luôn qua A. Gọi M là hình chiếu của O trên d.

a) Tìm tập hợp các điểm M thoả các tính chất nêu trên.

b) Tìm vị trí của d để độ dài OM là lớn nhất.

**Giải**

- a) Gọi H là hình chiếu của O trên  $(\alpha)$ . Vì  $OM \perp d$  nên  $HM \perp d$  (định lý ba đường vuông góc).

Vậy  $\widehat{HMA} = 1v$ . Do đó M ở trên đường tròn (C) đường kính AH.

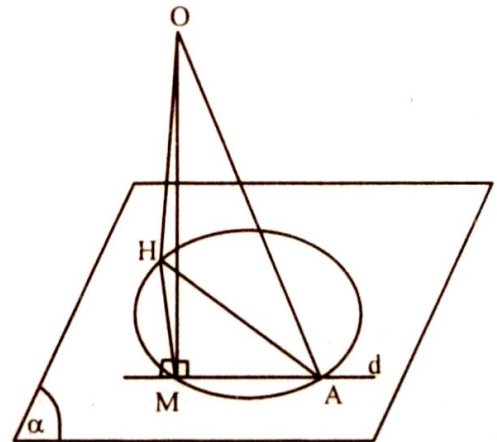
Đảo lại, lấy M tùy ý trên (C), M khác với A và H. Khi đó:  $HM \perp MA$  hay  $HM \perp d$ . Theo định lý ba đường vuông góc, ta có  $OM \perp d$ .

Kết luận vẫn đúng khi M ở tại A hay H.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn (C) đường kính AH trên mp  $(\alpha)$ .

- b) OM lớn nhất khi và chỉ khi HM lớn nhất.

HM lớn nhất khi và chỉ khi M ở tại A. Khi đó d là tiếp tuyến với (C) tại A, tức là  $d \perp AH$ .



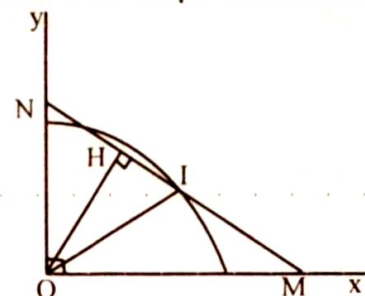
**Ví dụ 13:** Cho góc vuông  $\widehat{xOy}$ . Trên các tia Ox và Oy, lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho  $MN = a$ , với a là một độ dài cho trước.

a) Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN.

b) Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Oxy) tại O, lấy một điểm A cố định. Hãy xác định vị trí của M và N sao cho diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất.

**Giải**

- a)  $OI = \frac{MN}{2} = \frac{a}{2}$  và I thuộc góc vuông  $\widehat{xOy}$  nên:



Tập hợp các điểm I là phần của đường tròn tâm O bán kính  $\frac{a}{2}$  nằm trong góc  $\widehat{xOy}$ .

- b) Dựng  $AH \perp MN$  thì theo định lý ba đường vuông góc  $OH \perp MN$ .

Ta có:  $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} AH \cdot MN = \frac{1}{2} a \cdot AH$ .

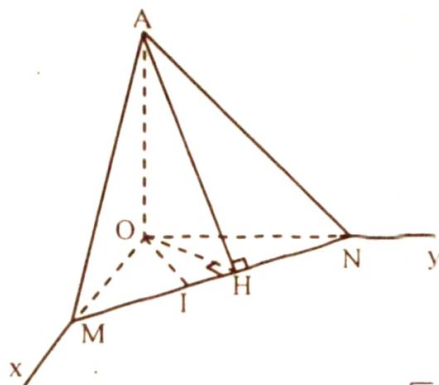
Diện tích tam giác AMN lớn nhất khi và chỉ khi AH lớn nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi OH lớn nhất.

Trong tam giác vuông OHI ta luôn luôn có:

$$OH \leq OI \Rightarrow OH \leq \frac{a}{2}$$

Giá trị lớn nhất của OH là  $\frac{a}{2}$  giá trị này

đạt được khi và chỉ khi H trùng với I, khi đó OMN là tam giác vuông cân.



Vậy diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất khi:  $OM = ON = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

**Ví dụ 14:** Tứ diện SABC có ABC là tam giác vuông cân đỉnh B,  $AB = a$ , SA vuông góc với (ABC) và  $SA = a\sqrt{2}$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt trung trực của SB, O là trung điểm của BC,  $\Delta$  là đường thẳng qua O và vuông góc với mặt phẳng ABC.

- a) Dựng giao điểm của  $\Delta$  và mặt phẳng  $(\alpha)$ .

- b) Tính OK.

**Giải**

- a) Trước hết ta xác định mặt phẳng  $(\alpha)$ .

Gọi M là trung điểm của đoạn SB.

Dựng đường cao AH của tam giác SAB rồi dựng  $MF \parallel HA$ ,  $F \in SA$ , ta được:  $MF \perp SB$ .

Mặt khác ta có:  $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$ .

Dựng  $MN \parallel BC$ ,  $N \in SC$ , thì:  $MN \perp SB$ . Suy ra  $(\alpha)$  là mặt phẳng (MNF).

Vì  $\Delta \perp (ABC)$  nên  $\Delta \parallel AS$ .

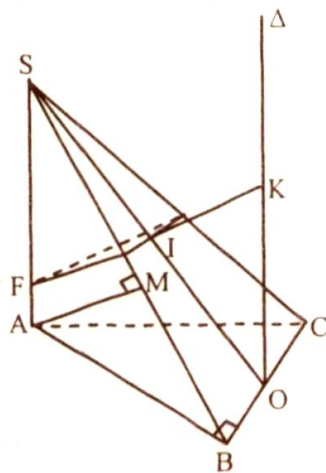
Gọi  $\beta$  là mặt phẳng (SA,  $\Delta$ ). Ta tìm giao tuyến của  $\beta$  và  $\alpha$ . Ta có: F là điểm chung thứ nhất của  $\beta$  và  $\alpha$ .

Trong (SBC) gọi I là giao điểm của MN và SO thì I là điểm chung thứ hai của  $\beta$  và  $\alpha$ . Do đó:  $\beta \cap \alpha = FI$ .

Đường thẳng FI cắt  $\Delta$  tại K thì K chính là giao điểm cần dựng của  $\Delta$  và  $\alpha$ .

- b) Vì I là trung điểm của SO nên  $OK = SF$ .

Hai tam giác vuông SMF và SAB đồng dạng nên ta có:

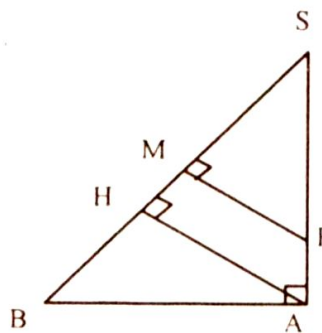




$$\frac{SF}{SB} = \frac{SM}{SA} \Rightarrow SF = \frac{SB \cdot SM}{SA}$$

$$\text{với } SB = a\sqrt{3}, SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SA = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có } SF = \frac{3a\sqrt{2}}{4}. \text{ Vậy } OK = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$



**Ví dụ 15:** Cho tứ diện ABCD và mặt phẳng (P). Tìm điểm M thuộc (P) để  $T = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$  bé nhất.

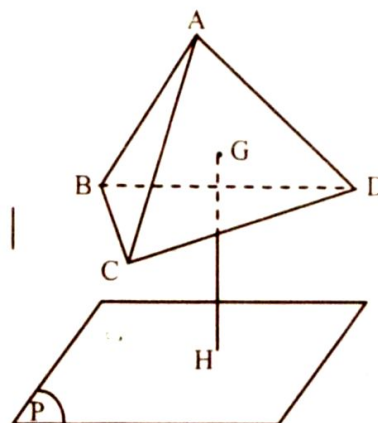
**Giải**

Gọi G là trọng tâm tứ diện ABCD.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$$

$$\text{Nên } T = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |4\overrightarrow{MG}|$$

Do đó T bé nhất khi MG bé nhất, mà G cố định và M thuộc (P) nên MG bé nhất khi M là hình chiếu của trọng tâm G lên mặt phẳng (P).



**Ví dụ 16:** Cho tứ diện ABCD và đường thẳng d. Tìm điểm M thuộc d để  $X = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 + 4MD^2$  bé nhất.

**Giải**

$$\text{Gọi I là điểm sao cho: } \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} + 4\overrightarrow{ID} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AI} + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) + 4(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AI}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{AD} = 10\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{10}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$$

Do đó I cố định. Hạ  $IH \perp d$  thì H cố định.

$$\text{Ta có } X = \overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 + 3\overrightarrow{MC}^2 + 4\overrightarrow{MD}^2$$

$$= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 + 4(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})^2$$

$$= 10MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 2IC^2 + 4ID^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} + 4\overrightarrow{ID})$$

$$= 10MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 + 4ID^2$$

$$\geq 10 \cdot HI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 + 4ID^2: \text{ không đổi.}$$

Vậy X bé nhất khi M là hình chiếu H của I lên d.

**Ví dụ 17:** Cho hình chóp S.ABCD, đáy là nửa lục giác đều  $AB = BC = CD = a$ .

Cạnh bên SA vuông góc với đáy và  $SA = a\sqrt{3}$ .

a) Tìm trên cạnh bên SB một điểm  $M \neq B$  sao cho  $\widehat{AMD} = 90^\circ$ .

b) Mặt phẳng (AMD) cắt hình chóp theo một thiết diện, tính diện tích thiết diện đó.

**Giải**

Ta dùng vector với hệ vector cơ sở:  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AS} = \vec{c}$ .

a) Đặt  $\overrightarrow{SM} = \alpha \cdot \overrightarrow{SB} = \alpha(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AS}) = \alpha(\vec{a} - \vec{c})$

Với  $0 \leq \alpha < 1$  vì  $M \neq B$ . Ta có:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SM} = -\vec{c} - \alpha(\vec{a} - \vec{c}) = -\alpha\vec{a} + (\alpha - 1)\vec{c}$$

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} = -\alpha\vec{a} + (\alpha - 1)\vec{c} + \vec{b}.$$

Ta có:  $\widehat{AMD} = 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$

$$\Leftrightarrow [-\alpha\vec{a} + (\alpha - 1)\vec{c}] [-\alpha\vec{a} + (\alpha - 1)\vec{c} + \vec{b}] = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 \vec{a}^2 - \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\alpha - 1)^2 \vec{c}^2 = 0$$

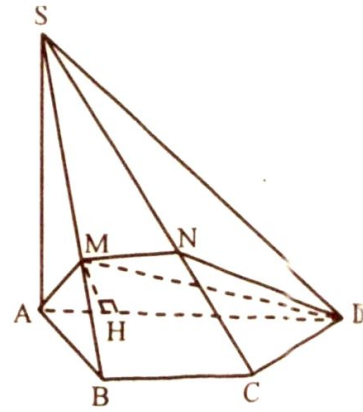
$$\Leftrightarrow \alpha^2 a^2 - \alpha(a^2) + (\alpha - 1)^2 \cdot 3a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha + (\alpha^2 - 2\alpha + 1)3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 7\alpha + 3 = 0, \text{ chọn } \alpha = \frac{3}{4}.$$

Do đó  $\overrightarrow{SM} = \frac{3}{4} \overrightarrow{SB}$

M thuộc đoạn SB sao cho  $\frac{SM}{SB} = \frac{3}{4}$ .



b) Thiết diện là hình thang AMND có  $AD = 2a$ .

$$\frac{MN}{BC} = \frac{SM}{SB} = \frac{3}{4} \Rightarrow MN = \frac{3}{4}a. \text{ Hạ } MH \perp AD.$$

Đặt  $\overrightarrow{AH} = \beta \overrightarrow{AD}$  thì  $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AM} = \beta \vec{b} - \alpha\vec{a} + (\alpha - 1)\vec{c}$

Ta có:  $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow [\beta \vec{b} - \alpha\vec{a} + (\alpha - 1)\vec{c}] \vec{b} = 0$

$$\Leftrightarrow \beta \vec{b}^2 - \alpha \vec{a} \cdot \vec{b} + (\alpha - 1) \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \beta(4a^2) - \alpha(a^2) + 0 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \beta(4a^2) - \frac{3}{4}a^2 = 0 \Leftrightarrow 4\beta = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{16}.$$

Do đó  $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{16} \overrightarrow{AD}$ . Ta có  $\overrightarrow{MH} = \frac{3}{16} \vec{b} - \frac{3}{4} \vec{a} - \frac{1}{4} \vec{c}$

$$\text{Nên } MH^2 = \left( \frac{3}{16} \vec{b} - \frac{3}{4} \vec{a} - \frac{1}{4} \vec{c} \right)^2 = \frac{1}{256} (3 \vec{b} - 12 \vec{a} - 4 \vec{c})^2$$

$$= \frac{1}{256} (9 \vec{b}^2 + 144 \vec{a}^2 + 16 \vec{c}^2 - 72 \vec{a} \cdot \vec{b} - 0 + 0)$$

$$= \frac{1}{256} (36a^2 + 144a^2 + 48a^2 - 72a^2) = \frac{156a^2}{256}$$

$$\Rightarrow MH = \frac{a}{16} \sqrt{156} = \frac{a}{8} \sqrt{39}$$

$$\text{Diện tích } S_{AMND} = \frac{1}{2} (AD + MN) \cdot MH = \frac{1}{2} \left( 2a + \frac{3}{4}a \right) \frac{a}{8} \sqrt{39} = \frac{11a^2}{64} \sqrt{39}.$$



- Ví dụ 18:** Cho hình chóp S.ABCD đáy là nửa lục giác đều ABCD có  $AB = BC = CD = a$ , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và  $SA = a\sqrt{3}$ . M và I là hai điểm sao cho  $3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MS} = \vec{0}$ ,  $4\overrightarrow{IS} + 3\overrightarrow{ID} = \vec{0}$ . Mặt phẳng (AMI) cắt SC tại N.
- Chứng minh N là trung điểm SC.
  - Chứng minh SD vuông góc với mặt phẳng (AMI).
  - Chứng minh  $\widehat{ANI} = 90^\circ$ ;  $\widehat{AMI} = 90^\circ$
  - Tính diện tích của thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AMI) và hình chóp S.ABCD.

**Giải**

Chọn hệ vectơ cơ sở  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,

$$\overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AS} = \vec{c}$$

$$\text{thì } \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60^\circ = a \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} = a^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0; \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\text{a) Ta có } \overrightarrow{BM} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BS} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4} (\vec{c} - \vec{a})$$

$$\overrightarrow{SI} = \frac{3}{7} \overrightarrow{SD} = \frac{3}{7} (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AS}) = \frac{3}{7} (\vec{b} - \vec{c})$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{a} + \frac{1}{4} (\vec{c} - \vec{a}) = \frac{3}{4} \vec{a} + \frac{1}{4} \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SI} = \vec{c} + \frac{3}{7} (\vec{b} - \vec{c}) = \frac{3}{7} \vec{b} + \frac{4}{7} \vec{c}$$

Vì N thuộc SC nên có số  $\alpha$  sao cho  $\overrightarrow{SN} = \alpha \overrightarrow{SC} = \alpha (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS})$ .

$$\overrightarrow{SN} = \alpha (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AS}) = \alpha (\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2} - \vec{c})$$

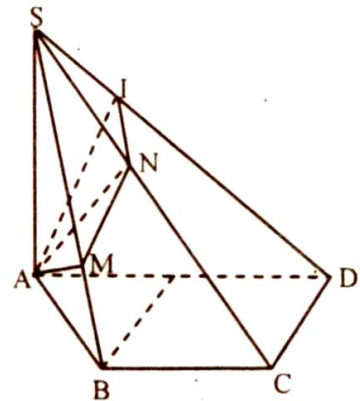
Vì  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{AN}$ ,  $\overrightarrow{AI}$  đồng phẳng nên có số  $x, y$  sao cho  $\overrightarrow{AN} = x \overrightarrow{AM} + y \overrightarrow{AI}$ .

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SN} = \vec{c} + \alpha (\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2} - \vec{c}) = \alpha \vec{a} + \frac{\alpha}{2} \vec{b} + (1 - \alpha) \vec{c}$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AN} = x \overrightarrow{AM} + y \overrightarrow{AI}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \vec{a} + \frac{\alpha}{2} \vec{b} + (1 - \alpha) \vec{c} = x (\frac{3}{4} \vec{a} + \frac{1}{4} \vec{c}) + y (\frac{3}{7} \vec{b} + \frac{4}{7} \vec{c})$$

$$\Leftrightarrow \alpha \vec{a} + \frac{\alpha}{2} \vec{b} + (1 - \alpha) \vec{c} = \frac{3}{4} x \vec{a} + \frac{3}{7} y \vec{b} + (\frac{1}{4} x + \frac{4}{7} y) \vec{c}.$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{4}x \\ \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{7}y \\ 1 - \alpha = \frac{1}{4}x + \frac{4}{7}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{7}{12} \end{cases}$$

Vậy  $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

Nên  $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$  do đó N là trung điểm của SC.

b) Ta có  $\overrightarrow{SD} = \vec{b} - \vec{c}$  nên:  $\overrightarrow{SD} \cdot \overrightarrow{AI} = (\vec{b} - \vec{c})\left(\frac{3}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}\vec{c}\right)$

$$= \frac{3}{7}\vec{b}^2 + \frac{4}{7}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{3}{7}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{4}{7}\vec{c}^2 = 0$$

Do đó  $SD \perp AI$ , và  $\overrightarrow{SD} \cdot \overrightarrow{AM} = (\vec{b} - \vec{c})\left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}\right)$

$$= \frac{3}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{3}{4}\vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{1}{4}\vec{c}^2 = 0$$

Do đó  $SD \perp AM$ . Vậy  $SD \perp mp(AMI)$

c) Ta có  $\overrightarrow{NI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{28}\vec{b} + \frac{1}{14}\vec{c}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{NI} &= \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{28}\vec{b} + \frac{1}{14}\vec{c}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\vec{a}^2 + \frac{5}{56}\vec{a} \cdot \vec{b} + 0 - \frac{1}{8}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{5}{112}\vec{b}^2 + 0 - 0 + 0 + \frac{1}{28}\vec{c}^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AN \perp NI \text{ và } \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AM} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b} + \frac{9}{28}\vec{c}$$

Tương tự  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Rightarrow AM \perp MI$ .

d)  $AM^2 = \left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}\right)^2 = \frac{9}{16}\vec{a}^2 + 0 + \frac{1}{16}\vec{c}^2 = \frac{12a^2}{16} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$AN^2 = \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)^2 = \frac{1}{4}\vec{a}^2 + \frac{1}{16}\vec{b}^2 + \frac{1}{4}\vec{c}^2 + \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} + 0 + 0 = \frac{6}{4}a^2$$

$$\Rightarrow AN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$IN^2 = (\overrightarrow{NI})^2 = \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{28}\vec{b} + \frac{1}{14}\vec{c}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(-\vec{a} + \frac{5}{14}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}\right)^2$$



$$= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{a^2} + \frac{25}{196} \frac{1}{b^2} + \frac{1}{49} \frac{1}{c^2} - \frac{5}{7} \frac{1}{ab} - \frac{2}{7} \frac{1}{ac} + \frac{5}{49} \frac{1}{bc} \right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{42a^2}{49}$$

$$\Rightarrow NI = \frac{a\sqrt{42}}{14}$$

$$S_{ANI} = \frac{1}{2} AN \cdot NI = \frac{6a^2\sqrt{7}}{56} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{28}$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \left( \frac{3}{4} \vec{a} + \frac{1}{4} \vec{c} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{4} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c} \right)$$

$$= \frac{1}{16} (6\vec{a}^2 + 3\vec{a}\vec{b} + 6\vec{a}\vec{c} + 2\vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} + 2\vec{c}^2) = \frac{15a^2}{16}$$

$$\text{nên } \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}}{AM \cdot AN} = \frac{5}{4\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sin(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = \frac{\sqrt{14}}{8}$$

$$S_{MAN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{14}}{8} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{32}$$

$$\text{Vậy } S_{AMNI} = S_{ANI} + S_{MAN} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{28} + \frac{3a^2\sqrt{7}}{32} = \frac{45a^2\sqrt{7}}{224}.$$

### C. BÀI LUYỆN TẬP

1. Cho hai đường thẳng  $a, b$  và mặt phẳng  $\alpha$ . Các mệnh đề Đ, S?

- a) Nếu  $a // \alpha$  và  $b \perp \alpha$  thì  $a \perp b$
- b) Nếu  $a // \alpha$  và  $b \perp a$  thì  $b \perp \alpha$
- c) Nếu  $a // \alpha$  và  $b // a$  thì  $b // \alpha$
- d) Nếu  $a \perp \alpha$  và  $b \perp \alpha$  thì  $a // b$

**ĐS:** a) Đ b) S c) S d) S

2. Chứng minh nếu có một điểm cách đều bốn đỉnh của một tứ giác thì tứ giác đó có đường tròn ngoại tiếp.

**HD:** dùng hình chiếu các đoạn xiên bằng nhau

3. Cho tứ diện ABCD có  $AB = 5a, BC = 3a, CD = 4a$  đôi một vuông góc.

- a) Tính đoạn AD
- b) Tìm điểm O cách đều A, B, C, D.

**ĐS:** b) O là trung điểm của AD

4. Cho tứ diện đều ABCD cạnh  $a$ . Tìm điểm O cách đều 4 đỉnh A, B, C, D và tính đoạn OA.

**HD:** O là trọng tâm tứ diện

5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O.

Biết rằng  $SA = SC, SB = SD$ . Chứng minh:  $AC \perp SD$

6. Cho tứ diện SABC có ABC là tam giác vuông tại B và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi AH là đường cao của tam giác SAB và AK là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh  $HK \perp SC$ .

**HD:** Chứng minh  $SC \perp (AHK)$ .

7. Tứ diện OABC có các cạnh  $OA = a$ ,  $OB = b$ ,  $OC = c$  đôi một vuông góc với nhau. Hạ  $OH \perp (ABC)$ . Tính đoạn OH.

**HD:** dùng hệ thức  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

8. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tính góc giữa :

- hai đường thẳng AC và B'D'
- hai đường thẳng AB' và BC'
- hai đường thẳng BD' và AC
- hai đường thẳng AC' và CD'.

**ĐS:** a)  $90^\circ$  b)  $60^\circ$  c)  $90^\circ$

9. Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh  $AB = c$  và nằm trong một mặt phẳng (P), cạnh  $AC = b$  và tạo với mặt phẳng (P) góc  $\alpha$ .

Tính sin của góc tạo bởi cạnh BC với mp(P).

**HD:** Xác định hình chiếu của A lên mp(P).

10. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Đường chéo AC' hợp với 3 mặt chung đỉnh góc  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  và 3 cạnh chung đỉnh góc x, y, z.

a) Chứng minh  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$

b) Chứng minh  $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$

11. Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O và có  $SB = SD$ .

a) Chứng minh (SAC) là mặt trung trực của đoạn BD

b) Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SD. Chứng minh  $SH = SK$ ,  $OH = OK$  và HK song song với BD.

**HD:** a) mặt phẳng trung trực là mặt phẳng vuông góc với đoạn đó tại trung điểm

12. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Trên đường thẳng vuông góc với (ABCD) tại O, lấy điểm S sao cho  $SO = b$ . Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC lần lượt cắt SB, SC, SD tại B', C', D'

a) Chứng minh  $B'D' \parallel BD$ . Từ đó suy ra cách dựng B' và D'

b) Xác định và tính diện tích của thiết diện AB'C'D'.

**HD:** thiết diện có 2 đường chéo vuông góc



13. Tứ diện SABC có ABC là tam giác vuông cân tại B,  $AB = a$ , SA vuông góc với (ABC),  $SA = b$ . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB.

Xác định và tính diện tích của thiết diện cắt bởi (P).

14. Cho tứ diện ABCD. Tìm tập hợp các điểm M sao cho  $MA^2 - MB^2 = k$  cho trước.

**HD:** dùng công thức hiệu bình phương

15. Cho tứ diện ABCD. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

16. Cho tứ diện ABCD. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

$$(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = \vec{0}$$

**ĐS:** mặt phẳng đi qua trọng tâm tứ diện và vuông góc với AD.

17. Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O, SA vuông góc với (ABCD) và  $SA = a$ .

a) Gọi I là trung điểm của SD. Chứng minh AI vuông góc với (SCD)

b) M là điểm di động trên đoạn SD. Tìm tập hợp các hình chiếu của O trên CM.

18. Cho tứ diện ABCD các cạnh thỏa mãn:

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

Chứng minh có ít nhất 1 mặt là tam giác nhọn.

19. Cho tứ diện ABCD và mặt phẳng (P). Tìm điểm M thuộc (P) sao cho  $2MA^2 - MB^2 + 2MC^2 - MD^2$  nhỏ nhất.

**ĐS:** M là hình chiếu của điểm I là điểm sao cho  $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{ID} = \vec{0}$  lên mặt phẳng (P).

20. Cho tứ diện ABCD. Tìm điểm M thuộc (ABC) sao cho:

$$|4\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 6\overrightarrow{MD}| \text{ nhỏ nhất.}$$

**ĐS:** M là hình chiếu của điểm I là điểm sao cho

$$4\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} - 6\overrightarrow{ID} = \vec{0} \text{ lên mặt phẳng (ABC).}$$



## §4. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

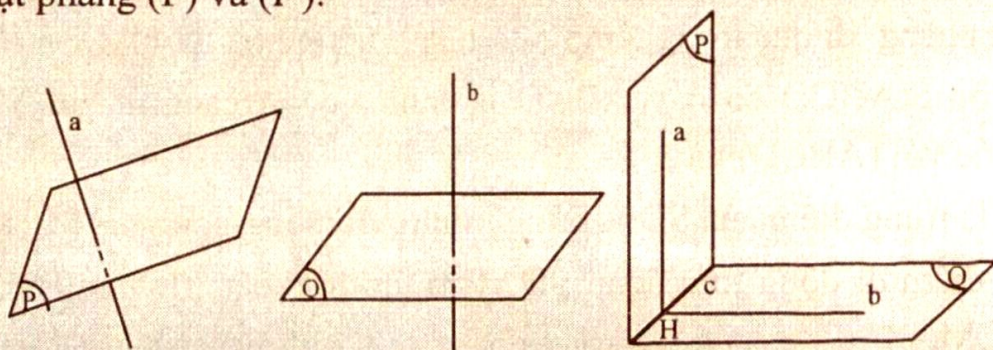
### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó. Nếu hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì góc của chúng là  $0^\circ$ .

Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến  $\Delta$  nếu mặt phẳng (R) vuông góc với  $\Delta$ , lần lượt cắt (P) và (Q) theo các giao tuyến p và q thì góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa hai đường thẳng p, q.

- Diện tích hình chiếu:

Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu (H') của (H) trên mặt phẳng (P') thì  $S' = S \cdot \cos \varphi$ , trong đó  $\varphi$  là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').

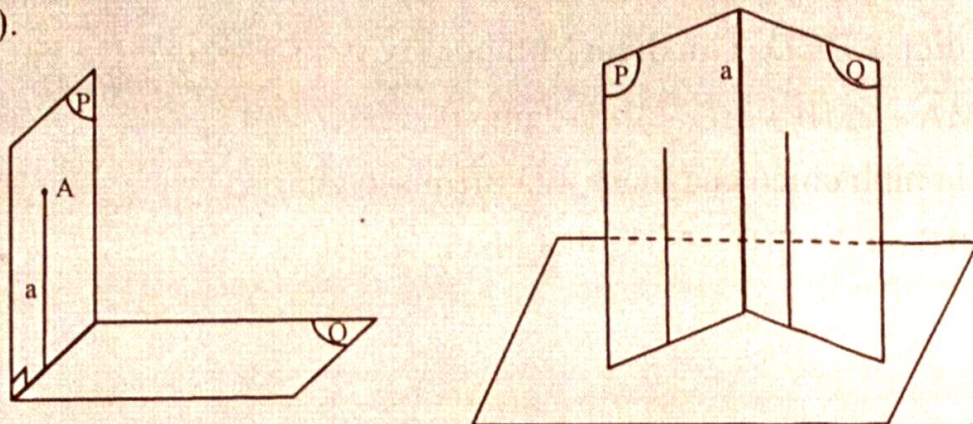


- Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng  $90^\circ$ .

- Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q).

- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm nằm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P).

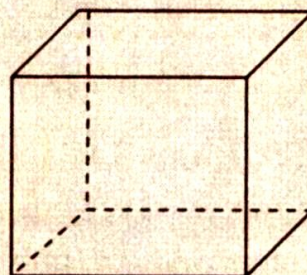
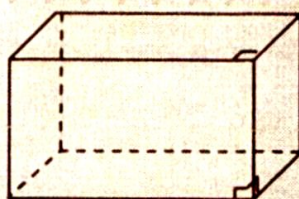
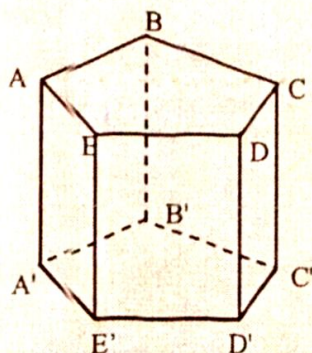


- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.



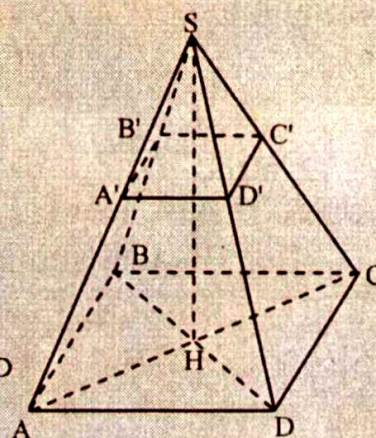
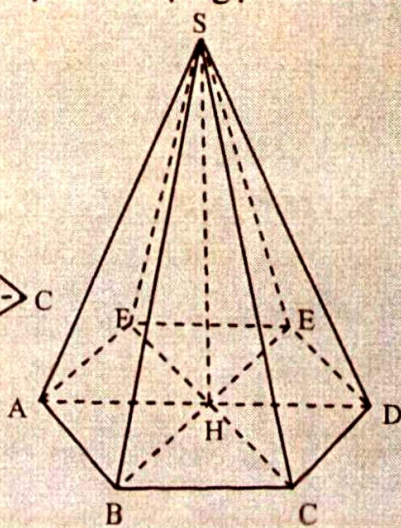
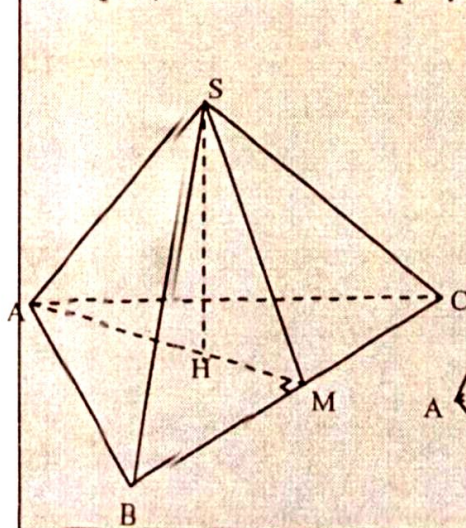
- Qua đường thẳng  $a$  không vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  có duy nhất một mặt phẳng  $(Q)$  vuông góc với mặt phẳng  $(P)$ .

- Hình lăng trụ đứng: hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
- Hình lăng trụ đều: hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.
- Hình hộp đứng: hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.
- Hình hộp chữ nhật: hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.
- Hình lập phương: hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.



- Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

- Khi cắt chóp đều bởi một mặt phẳng song song với đáy để được một chóp cắt thì hình chóp cắt đó được gọi là hình chóp cắt đều.



## B. PHÂN DẠNG TOÁN

### DẠNG 1: CHỨNG MINH VUÔNG GÓC

Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc:

- Chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

- Chứng minh góc giữa hai mặt phẳng bằng  $90^\circ$ .

Chú ý: - Việc chứng minh 2 mặt phẳng vuông góc đưa về chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng và việc chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng lại đưa về chứng minh đường thẳng vuông góc với 2 đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng.



- Vấn đề chứng minh hai đường thẳng vuông góc, đường thẳng vuông góc với mặt phẳng là nền tảng cơ bản trong vận dụng giải toán. Đặc biệt, nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

**Ví dụ 1:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  vuông tại  $B$ ,  $SA \perp mp(ABC)$ .

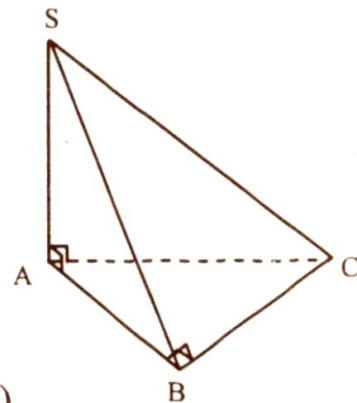
Chứng minh

a)  $mp(SAB) \perp mp(ABC)$ ,  $mp(SAC) \perp mp(ABC)$ .

b)  $mp(SBC) \perp mp(SAB)$ .

**Giải**

- a) Vì  $SA \perp mp(ABC)$   
và  $SA \subset mp(SAB)$ ,  $mp(SAC)$   
nên  $mp(SAB) \perp mp(ABC)$ ,  
 $mp(SAC) \perp mp(ABC)$
- b) Ta có  $BC \perp AB$  và có  $SA \perp (ABC)$   
nên  $BC \perp SA$ , do đó  $BC \perp (SAB)$   
Mà  $BC \subset (SBC)$  nên  $mp(SBC) \perp mp(SAB)$ .



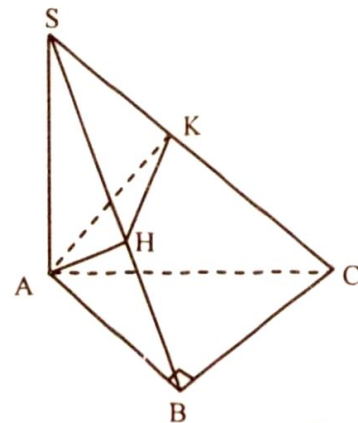
**Ví dụ 2:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  vuông tại  $B$  và 2 mặt bên  $(SAB)$ ,  $(SAC)$  cùng vuông góc với đáy.

a) Chứng minh  $SA \perp (ABC)$ .

b) Hạ  $AH \perp SB$ ,  $AK \perp SC$ . Chứng minh  $(AHK) \perp (SBC)$ .

**Giải**

- a) Ta có  $(SAB)$ ,  $(SAC) \perp (ABC)$  nên giao tuyến  $SA \perp (ABC)$ .
- b) Ta có  $AB \perp BC$  nên đường xiên  $SB \perp BC$  do đó  $BC \perp (SAB)$   
 $\Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$ .  
Vì  $AH$  vuông góc với giao tuyến  $SB$   
nên  $AH \perp (SBC)$   
Mà  $AH \subset (AHK)$  nên  $(AHK) \perp (SBC)$ .



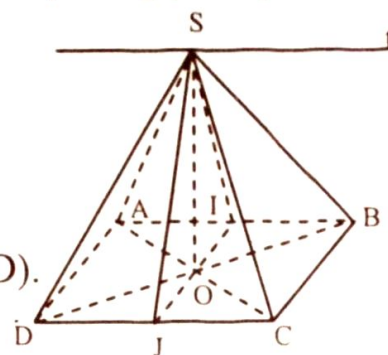
**Ví dụ 3:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{3}$  và đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $2a$ . Chứng minh:

a)  $mp(SAC) \perp mp(SBD)$ .

b)  $mp(SAB) \perp mp(SCD)$ .

**Giải**

- a) Hạ  $SO \perp (ABCD)$   
vì  $SA = SB = SC = SD$   
nên  $OA = OB = OC = OD$   
do đó  $O$  là tâm của hình vuông đáy  
Ta có:  $AC \perp BD$ ,  $AC \perp SO \Rightarrow AC \perp (SBD)$ .  
Vậy  $(SAC) \perp (SBD)$ .





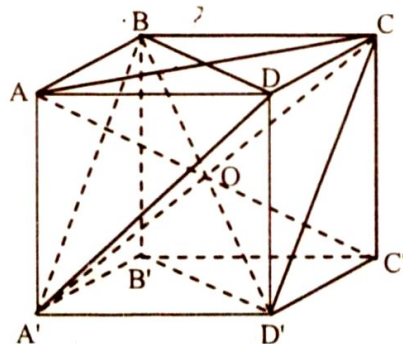
- b) Vì  $AB \parallel CD$  nên giao tuyến của 2 mặt phẳng  $(SAB)$ ,  $(SCD)$  là  $St \parallel AB$ .  
 Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ .  
 Ta có  $SI \perp AB, SJ \perp CD \Rightarrow SI, SJ \perp St$  nên góc giữa 2 mặt phẳng  $(SAB)$ ,  $(SCD)$  là góc giữa 2 đường thẳng  $SI, SJ$ .  
 Ta có  $IJ = BC = 2a, SI^2 = SB^2 - IB^2 = 2a^2 = SJ^2$   
 $\Rightarrow SI^2 + SJ^2 = 4a^2 = IJ^2$  nên tam giác  $SIJ$  vuông tại  $S$ .  
 Vậy góc giữa 2 mặt phẳng  $(SAB)$ ,  $(SCD)$  bằng  $90^\circ$  nên  $(SAB)$  vuông góc với  $(SCD)$ .

**Ví dụ 4:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  tâm  $O$ . Chứng minh:

- a)  $(AA'; CC') \perp (BB', DD')$       b)  $(OAB) \perp (OCD)$   
 c)  $(ACC'A') \perp (A'BD)$ .

**Giải**

- a) Vì  $ABCD$  là hình vuông nên  $AC \perp BD$  mà  $AC \perp BB'$  nên  $AC \perp (BB', DD')$   
 Do đó  $(AA'; CC') \perp (BB', DD')$ .  
 b) Ta có  $mp(OAB) \equiv mp(AB; C'D')$ ,  
 $mp(OCD) \equiv mp(A'B'; CD)$ .  
 Vì  $BC' \perp B'C, BC' \perp CD$   
 $\Rightarrow BC' \perp (A'B'; CD)$ .  
 Do đó  $(AB; C'D') \perp (A'B'; CD) \Rightarrow đpcm$ .  
 c) Ta có  $AB = AD = AA'$  và  
 $C'B = C'D = C'A' = AB\sqrt{2}$   
 nên  $A, C'$  thuộc trục của tam giác  $A'BD$ .  
 Do đó  $AC' \perp (A'BD) \Rightarrow (ACC'A') \perp (A'BD)$ .

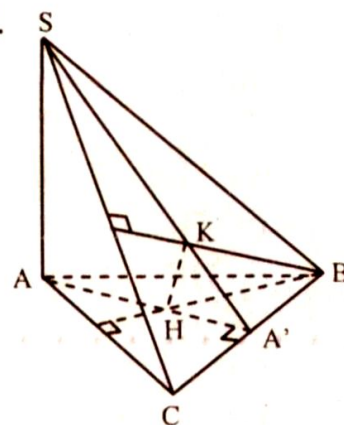


**Ví dụ 5:** Tứ diện  $SABC$  có  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ . Gọi  $H$  và  $K$  lần lượt là trực tâm của các tam giác  $ABC$  và  $SBC$ . Chứng minh rằng:

- a)  $(SAC) \perp (BHK)$       b)  $(SBC) \perp (BHK)$ .

**Giải**

- a) Để ý ba đường thẳng  $AH, SK$  và  $BC$  đồng quy tại  $A'$ .  
 Vì  $K$  là trực tâm của tam giác  $SBC$  nên  $BK \perp SC$ .  
 Vì  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$   
 và  $SA \perp (ABC)$  nên  $BH \perp AC, BH \perp SA$ .  
 Suy ra  $BH \perp (SAC)$  nên  $BH \perp SC$ .  
 Do đó  $SC \perp (BHK)$  nên ta có  $(SAC) \perp (BHK)$ .  
 b) Ta có  $BC \perp (SAA')$ , do đó  $BC \perp HK$ .  
 Và  $SC \perp (BHK)$ , do đó  $SC \perp HK$  nên  $HK \perp (SBC)$ .  
 Vì mặt phẳng  $(BHK)$  chứa  $HK$  nên  $(BHK) \perp (SBC)$ .



**Ví dụ 6:** Hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi  $ABCD$  cạnh  $a$  và có  $SA = SB = SC = a$ . Chứng minh:

- a) Mặt phẳng  $(ABCD)$  vuông góc với mặt phẳng  $(SBD)$ .  
 b) Tam giác  $SBD$  là tam giác vuông tại  $S$ .

### Giải

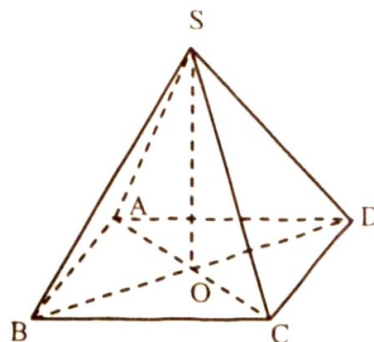
- a) Gọi O là tâm của hình thoi.

Ta có  $AC \perp BD$ .

Vì  $SA = SC$  nên  $SO \perp AC$ .

Do đó  $AC$  vuông góc với mặt phẳng (SBD) nên mặt phẳng (ABCD) vuông góc với mặt phẳng (SBD).

- b) Ba tam giác SAC, BAC, DAC bằng nhau (c.c.c) nên ta suy ra  $OS = OB = OD$   
 $\Rightarrow SO = \frac{BD}{2}$  nên tam giác SBD vuông tại S.



**Ví dụ 7:** Cho hình vuông ABCD và tam giác cân SAB nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

- a) Chứng minh  $mp(SAD) \perp mp(SAB)$ .

- b) Gọi I là trung điểm AB, K là trung điểm AD. Chứng minh rằng  $mp(SCK) \perp mp(SID)$ .

### Giải

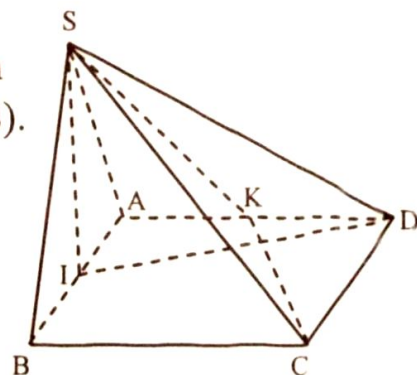
- a) Vì  $mp(ABCD) \perp mp(SAB)$  và  $AD \perp AB$  nên  $AD \perp mp(SAB)$ , do đó  $mp(SAD) \perp mp(SAB)$ .

- b) Ta có 2 tam giác vuông ADI và CDK bằng nhau (c.g.c) nên  $\widehat{ADI} = \widehat{DCK}$   
 Mà  $AD \perp CD$  nên  $DI \perp CK$ .

Vì I trung điểm của AB nên

$SI \perp AB \Rightarrow SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp CK$ .

Vậy  $CK \perp mp(SID)$  và do đó  $mp(SCK) \perp mp(SID)$ .



**Ví dụ 8:** Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD tâm I, có cạnh bằng a và đường chéo  $BD = a$ . Cạnh  $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$  vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Chứng minh hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) vuông góc với nhau.

### Giải

Vì ABCD là hình thoi nên  $BD \perp AC$

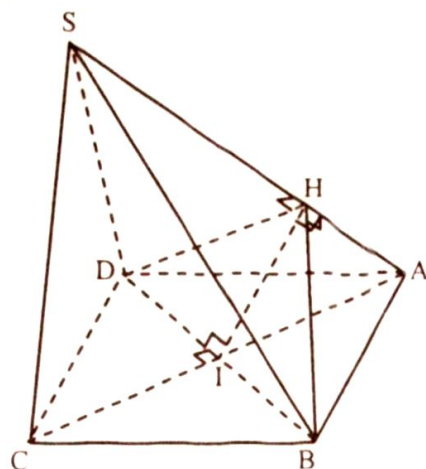
mà  $BD \perp SC \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow BD \perp SA$ .

Trong mặt phẳng (SAC) hạ  $IH \perp SA$  thì  $SA \perp (BDH)$ .

Do đó  $BH \perp SA$  và  $DH \perp SA$  nên góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là góc giữa hai đường thẳng HB, HD.

Hai tam giác vuông AHI và ACS có góc nhọn A chung nên đồng dạng.





$$\text{Do đó } \frac{IH}{AI} = \frac{SC}{AS} \Rightarrow IH = \frac{AIS C}{AS}$$

Vì  $BD = a$  nên  $ABD$  là tam giác đều, do đó:  $AC = 2AI = a\sqrt{3}$ .

$$SA = \sqrt{AC^2 + SC^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow IH = \frac{a}{2} = \frac{BD}{2}$$

Nên tam giác  $BHD$  vuông tại  $H$ .

Vậy hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SAD)$  vuông góc với nhau.

**Ví dụ 9:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang vuông tại  $A, B$  và có  $AD = 2AB = 2BC$ ,  $SA$  vuông góc với đáy. Chứng minh:

a)  $(SBC) \perp (SAB)$

b)  $(SCD) \perp (SAC)$ .

**Giải**

a) Ta có  $BC \perp BA \Rightarrow BC \perp SB$

nên  $BC \perp (SAB)$

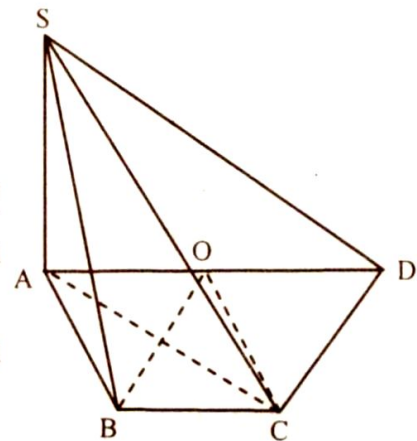
Do đó  $(SBC) \perp (SAB)$ .

b) Gọi  $O$  là trung điểm  $AD$  thì  $OA = AB = BC$  và  $OA \parallel BC$ , ta có góc  $A, B$  vuông nên  $OABC$  là hình vuông.

Do đó  $OB \perp AC$  mà  $OBCD$  hình bình hành nên  $OB \parallel CD$ , do đó  $CD \perp AC$ .

Mà  $CD \perp SA$  nên  $CD \perp (SAC)$ .

Vậy  $(SCD) \perp (SAC)$ .



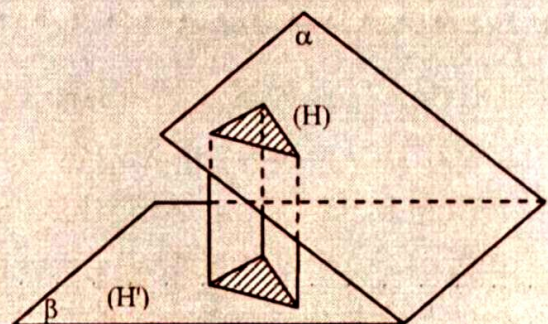
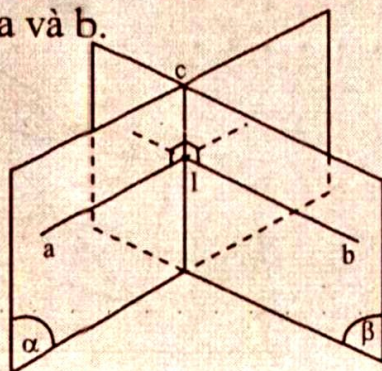
## DẠNG 2: GÓC GIỮA 2 MẶT PHẪNG

- Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Nếu hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì góc giữa hai mặt phẳng đó bằng  $0^\circ$ .

- Xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau:

Cho hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  cắt nhau theo giao tuyến  $c$ . Từ một điểm  $I$  bất kì trên  $c$  ta dựng đường thẳng  $a$  trong  $(\alpha)$  vuông góc với  $c$  và dựng đường thẳng  $b$  trong  $(\beta)$  vuông góc với  $c$ . Khi đó góc giữa  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  là góc giữa hai đường thẳng  $a$  và  $b$ .





- Nếu  $\varphi$  là góc giữa 2 mặt phẳng  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ . Hình  $(H)$  có diện tích  $S$  trên  $(P)$ , hình chiếu lên  $(\beta)$  là  $(H')$  có diện tích  $S'$  thì  $S' = S \cdot \cos\varphi$  hay  $S = \frac{S'}{\cos\varphi}$

Chú ý: - Góc giữa 2 đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc giữa 2 mặt phẳng đều có số đo từ  $0^\circ$  đến  $90^\circ$ .

- Có khi ta không cần xác định cụ thể góc  $\varphi$  của 2 mặt phẳng là góc của 2 đường thẳng, nếu biết được diện tích  $S$  và diện tích chiếu  $S'$  thì góc  $\varphi$  xác định bởi  $\cos\varphi = \frac{S'}{S}$ .

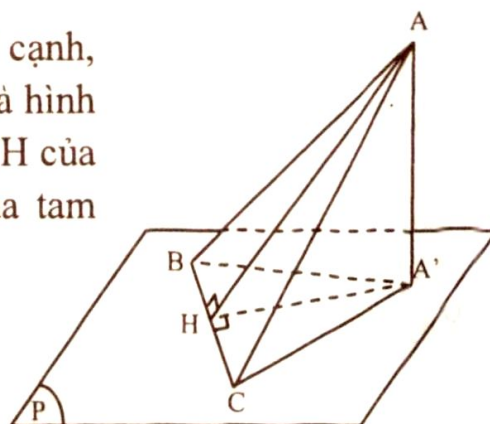
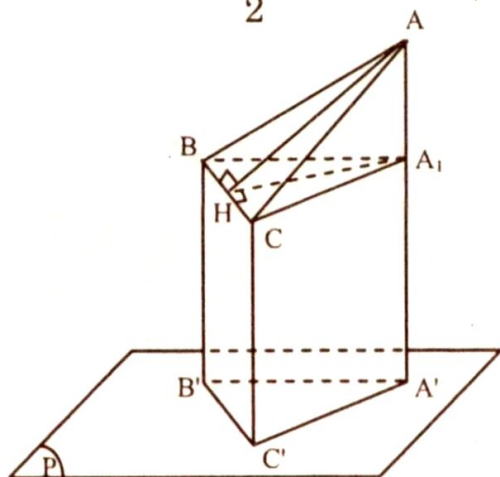
**Ví dụ 1:** Cho tam giác  $ABC$  và mặt phẳng  $(P)$ . Biết góc giữa  $mp(P)$  và  $mp(ABC)$  là  $\varphi < 90^\circ$ ; hình chiếu của tam giác  $ABC$  trên  $mp(P)$  là tam giác  $A'B'C'$ . Chứng minh rằng:  $S_{A'B'C'} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi$ .

**Giải**

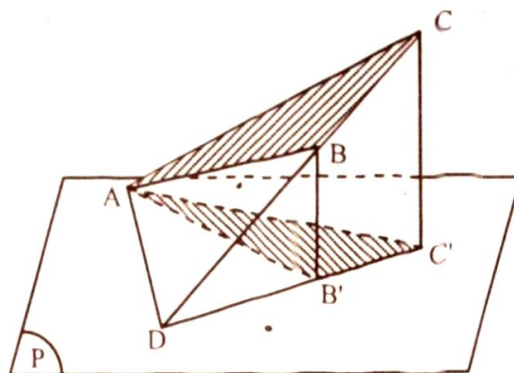
Ta xét 3 trường hợp:

- Xét trường hợp tam giác  $ABC$  có một cạnh, chẳng hạn  $BC$  nằm trong  $mp(P)$ . Gọi  $A'$  là hình chiếu của  $A$  trên  $mp(P)$ . Hạ đường cao  $A'H$  của tam giác  $A'BC$  thì  $AH$  là đường cao của tam giác  $ABC$  và  $\widehat{AHA'} = \varphi$ .

$$\begin{aligned} S_{A'BC} &= \frac{1}{2} BC \cdot A'H \\ &= \frac{1}{2} BC \cdot AH \cdot \cos\varphi = S_{ABC} \cdot \cos\varphi. \end{aligned}$$



- Xét trường hợp cạnh  $BC$  của tam giác  $ABC$  song song với  $mp(P)$ ,  $mp(Q)$  chứa  $BC$  và song song với  $mp(P)$ , gọi giao điểm của  $AA'$  với  $mp(Q)$  là  $A_1$ . Khi đó  $\Delta A_1BC = \Delta A'B'C'$ ; góc giữa  $mp(ABC)$  và  $mp(P)$  bằng  $\varphi$ .



Do đó:  $S_{A'B'C'} = S_{A_1BC} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi$ .

- Xét trường hợp tam giác  $ABC$  không có cạnh nào song song hay nằm trong  $mp(P)$ . Giả sử  $mp(P)$  đi qua điểm  $A$  sao cho các đỉnh  $B, C$  ở về cùng một phía



đối với  $mp(P)$ . Gọi  $D$  là giao điểm của đường thẳng  $BC$  và  $mp(P)$ ;  $B', C'$  lần lượt là hình chiếu của  $B, C$  trên  $(P)$  thì  $B'C'$  đi qua  $D$ .

Theo chứng minh trên thì  $S_{ADC'} = S_{ADC} \cdot \cos \varphi$  và  $S_{ADB'} = S_{ADB} \cdot \cos \varphi$

nên  $S_{AB'C'} = S_{ABC} \cdot \cos \varphi$ .

**Ví dụ 2:** Tam giác  $ABC$  vuông có cạnh huyền  $BC$  nằm trong  $mp(P)$ , cạnh  $AB$  và  $AC$  lần lượt tạo với  $mp(P)$  các góc  $\beta$  và  $\gamma$ . Gọi  $\alpha$  là góc tạo bởi  $mp(P)$  và  $mp(ABC)$ . Chứng minh rằng  $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma$ .

**Giải**

Hạ  $AA'$  vuông góc với  $mp(P)$  thì  $\widehat{ABA'}$ ,  $\widehat{ACA'}$  lần lượt là góc giữa  $AB, AC$  với  $mp(P)$ , theo giả thiết  $\widehat{ABA'} = \beta$ ,  $\widehat{ACA'} = \gamma$ .

Hạ đường cao  $AH$  của tam giác vuông  $ABC$  thì  $A'H \perp BC$  nên  $\widehat{AHA'} = \alpha$  là góc giữa  $mp(ABC)$  và  $mp(P)$ .

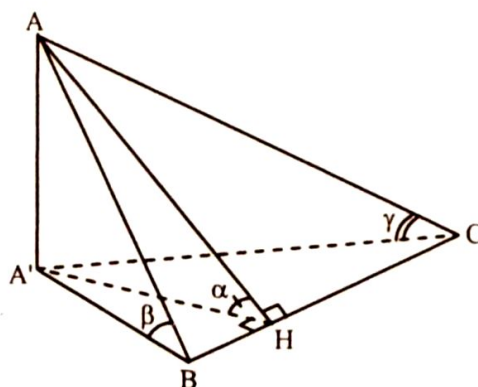
Ta có:  $\sin \beta = \frac{AA'}{AB}$ ,  $\sin \gamma = \frac{AA'}{AC}$ ,

$$\sin \alpha = \frac{AA'}{AH}.$$

Trong tam giác vuông  $ABC$ , ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{AA'^2}{AH^2} = \frac{AA'^2}{AB^2} + \frac{AA'^2}{AC^2} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma.$$



**Ví dụ 3:** Tứ diện  $OABC$  có cạnh  $OA, OB, OC$  vuông góc với nhau từng đôi một và có  $OA = a, OB = b, OC = c$ . Gọi  $\alpha, \beta, \gamma$  lần lượt là góc hợp bởi các mặt phẳng  $(OBC), (OCA), (OAB)$  với mặt phẳng  $(ABC)$ .

a) Chứng minh rằng  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .

b) Tính diện tích tam giác  $HAB, HBC$  và  $HCA$ .

**Giải**

Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của đỉnh  $O$  xuống mặt phẳng  $(ABC)$  thì  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$  với 3 đường cao  $AA', BB', CC'$ .

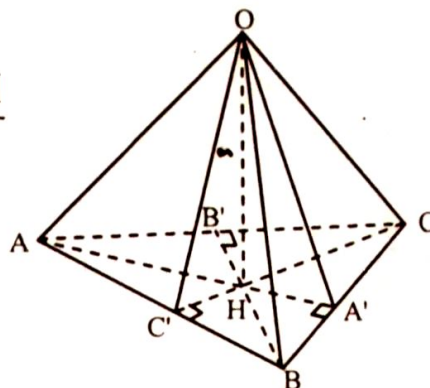
a) Ta có  $\alpha = \widehat{OA'A}$ ,  $\beta = \widehat{OB'B}$

$$\gamma = \widehat{OC'C} \text{ nên } \cos \alpha = \cos \widehat{OA'A}$$

$$= \sin \widehat{OAA'} = \frac{OH}{a}$$

$$\text{Tương tự } \cos \beta = \frac{OH}{b}, \cos \gamma = \frac{OH}{c}.$$

$$\text{Từ hệ thức } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$



**ABC**

$$\Rightarrow \frac{OH^2}{a^2} + \frac{OH^2}{b^2} + \frac{OH^2}{c^2} = 1$$

$$\text{Vậy } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

b) Ta có:  $OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$  và  $S_{HBC} = S_{OBC} \cdot \cos \alpha$

nên:  $S_{HBC} = \frac{b^2c^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$ . Tương tự:

$$S_{HAB} = \frac{a^2b^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}; S_{HAC} = \frac{c^2a^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

**Ví dụ 4:** Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Gọi  $\alpha, \beta, \gamma$  và  $x, y, z$  là 3 góc tạo bởi đường chéo AC' với 3 cạnh chung đỉnh A và 3 mặt chung đỉnh A. Chứng minh:

a)  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$

b)  $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 1$

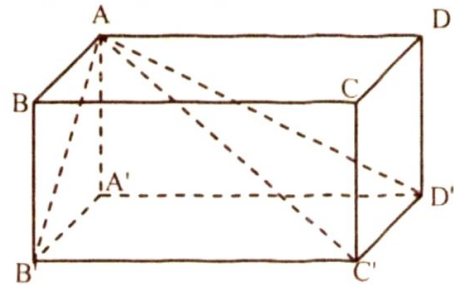
### Giải

Gọi 3 kích thước  $AA' = a, AB = b, AD = c$  và đường chéo  $d = AC'$  thì  $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ .

a) Ta có AA', AB, AD là 3 cạnh chung đỉnh A.

Xét 3 tam giác vuông AC'A', AC'B, AC'D:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma &= \left( \frac{A'C'}{d} \right)^2 + \left( \frac{BC'}{d} \right)^2 + \left( \frac{DC'}{d} \right)^2 \\ &= \frac{1}{d^2} (A'C'^2 + BC'^2 + DC'^2) \\ &= \frac{1}{d^2} (b^2 + c^2 + c^2 + a^2 + a^2 + b^2) \\ &= \frac{1}{d^2} (2a^2 + 2b^2 + 2c^2) = 2. \end{aligned}$$



b) Hình chiếu của AC' lên 3 mặt chung đỉnh A lần lượt là AB', AD' và AC. Xét 3 tam giác vuông AB'C', AD'C', ACC'.

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z &= \left( \frac{B'C'}{d} \right)^2 + \left( \frac{C'D'}{d} \right)^2 + \left( \frac{CC'}{d} \right)^2 \\ &= \frac{1}{d^2} (c^2 + b^2 + a^2) = 1. \end{aligned}$$

**Ví dụ 5:** Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng  $3a$ , cạnh bên bằng  $2a$ .

a) Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

b) Tính tang của góc tạo bởi các mặt bên và mặt đáy.



## Giải

- a) Gọi H là trọng tâm của  $\Delta ABC$  ta có  $SH \perp mp(ABC)$ ,  
 Nếu  $\alpha$  là góc giữa cạnh bên SA  
 và mặt phẳng đáy (ABC) thì  
 $\alpha = \widehat{SAH}$ .

Ta có

$$AH = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{3a\sqrt{3}}{3} = a\sqrt{3}$$

$$\text{nên } \cos \alpha = \frac{AH}{SA} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy } \alpha = 30^\circ.$$

Vì  $S.ABC$  là hình chóp tam giác đều nên góc giữa  $SB$ ,  $SC$  với đáy  $(ABC)$  cũng bằng  $30^\circ$ .

- b) Gọi I là trung điểm của BC. Nếu  $\varphi$  là góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC) thì  $\varphi = \widehat{SIH}$ . Ta có:

$$\tan \phi = \frac{SH}{HI} = \frac{SA \sin \alpha}{\frac{1}{2} AH} = \frac{2a \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} a \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Vì hình chóp đều nên tang của góc tạo bởi mặt bên khác và mặt đáy cũng bằng  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

**Ví dụ 6:** Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có tất cả các cạnh đáy đều bằng  $a$ . Biết góc tạo thành bởi cạnh bên và mặt đáy là  $60^\circ$  và hình chiếu  $H$  của đỉnh  $A$  lên  $mp(A'B'C')$  trùng với trung điểm của cạnh  $B'C'$ .

- a) Tính tang của góc giữa hai đường thẳng BC và AC'.  
b) Tính tang của góc giữa (ABB'A') và đáy.

## Giải

- a) Theo giả thiết tam giác  $AA'H$  vuông tại  $H$  và có  $\widehat{AA'H} = 60^\circ$ .

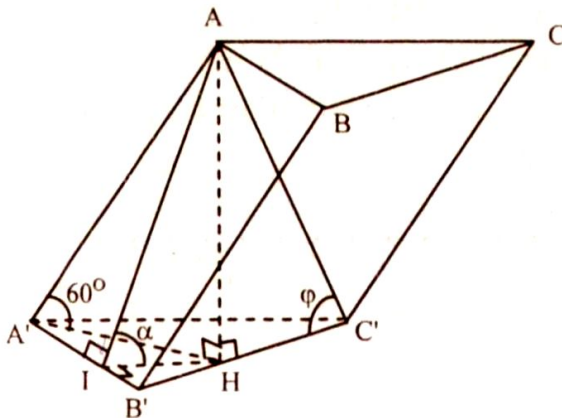
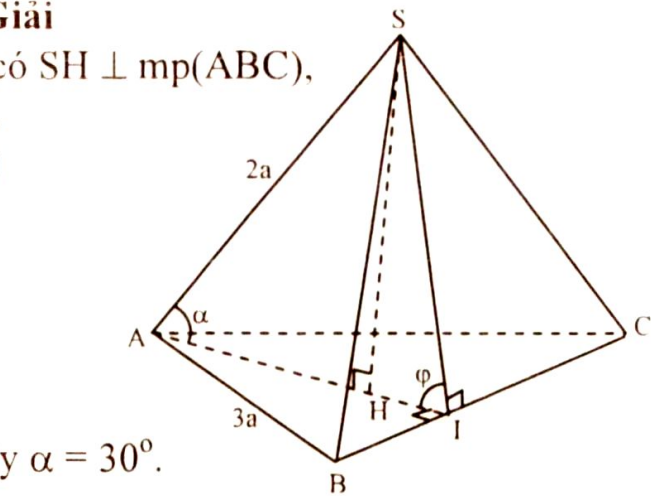
Từ đó suy ra:  $AH = \frac{3a}{2}$ .

Đặt  $\varphi = (AC', BC)$

$$\forall BC \parallel B'C'$$

$$\widehat{n\hat{e}n} \varphi = (AC', B'C') = \widehat{AC'H}.$$

$$\text{Suy ra } \tan \varphi = \frac{AH}{CH} = \frac{\frac{3a}{2}}{\frac{a}{2}} = 3.$$



- b) Vẽ  $HI \perp A'B'$  ta suy ra  $AI \perp A'B'$ .

Vậy  $\alpha = \widehat{AIH}$  chính là góc giữa  $(ABB'A')$  và đáy.

$$\text{Ta có: } \tan \alpha = \frac{AH}{IH} = \frac{\frac{3a}{2}}{B'H \sin 60^\circ} = \frac{\frac{3a}{2}}{\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}.$$

**Ví dụ 7:** Từ một điểm nằm ngoài mp(P), hạ đường vuông góc MA và hai đường xiên MB, MC tới mp(P). Biết MA = a, MB, MC đều tạo với mp(P) các góc  $30^\circ$  và  $MB \perp MC$ .

a) Tính đoạn BC.

b) Tính cosin góc  $\varphi$  tạo bởi (MBC) và (ABC).

**Giải**

a) Ta có  $MB = MC = \frac{MA}{\sin 30^\circ} = 2a$

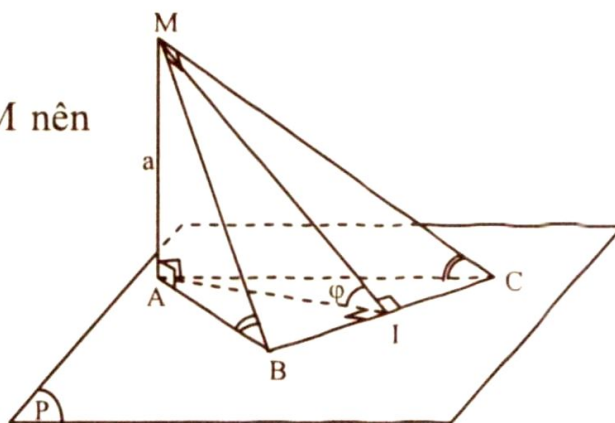
Vì tam giác BMC vuông cân tại M nên  $BC = MB\sqrt{2} = 2\sqrt{2}a$ .

b) Gọi I là trung điểm BC ta có  $IM \perp BC$  và  $AI \perp BC$ .

Ta có  $\varphi = \widehat{MIA}$ , khi đó:

$$\sin \varphi = \frac{MA}{MI} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy  $\varphi = 45^\circ$ .



**Ví dụ 8:** Tam giác ABC có đỉnh A nằm trong mặt phẳng ( $\alpha$ ), hai đỉnh B và C có hình chiếu trên ( $\alpha$ ) lần lượt là B' và C' sao cho AB'C' là tam giác đều cạnh a. Giả sử  $CC' = a$ ,  $BB' = \frac{a}{2}$ .

a) Gọi I là giao điểm của BC và B'C'. Chứng minh IA vuông góc với AC.

b) Tính diện tích của tam giác ABC rồi suy ra giá trị của góc  $\varphi$  giữa mặt phẳng ( $\alpha$ ) với (ABC).

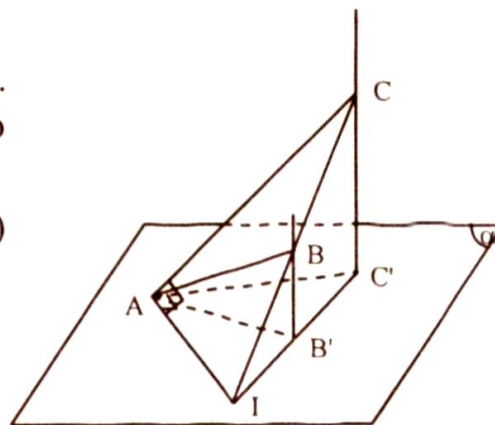
**Giải**

a) Vì  $CC' = 2BB'$  nên B' là trung điểm của IC'. Tam giác AIC' có:  $B'A = B'C' = B'I$  nên đó là tam giác vuông, hay  $IA \perp AC'$ .

Vì AC' là hình chiếu của AC trên mp( $\alpha$ ) nên  $IA \perp AC$ .

b)  $S_{AB'C'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$  (vì AB'C' là tam giác đều cạnh a).

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{IAC} = \frac{1}{4} IA \cdot AC \text{ mà } AC = a\sqrt{2}, IA = a\sqrt{3} \text{ nên:}$$





$$S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Ta có: } \cos\varphi = \frac{S'}{S} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{6}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

**Ví dụ 9:** Tam giác đều ABC cạnh a có hai đỉnh B và C nằm trong mặt phẳng  $(\alpha)$ , đỉnh A cách mặt phẳng  $(\alpha)$  một đoạn bằng  $\frac{a}{2}$ .

a) Tính  $\sin\varphi$  với  $\varphi$  là góc giữa  $(\alpha)$  và  $(ABC)$ .

b) Gọi E và F là các điểm xác định bởi  $\overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AB}$ ,  $\overline{AF} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ .

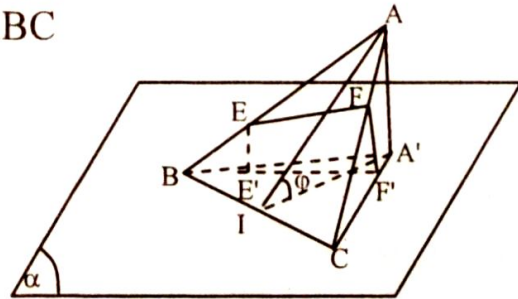
Tính diện tích hình chiếu của tam giác AEF trên  $(\alpha)$ .

**Giải**

a) Gọi A' là hình chiếu của A trên  $(\alpha)$  và I là trung điểm của BC. Vì tam giác ABC đều nên  $BC \perp IA$  và do đó  $BC \perp IA'$ .

Như vậy  $\varphi = \widehat{AIA'}$ .

$$\text{Ta có: } \sin\varphi = \frac{AA'}{IA} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$\text{b) } S_{AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot AF \cdot \sin A = \frac{a^2\sqrt{3}}{18} \text{ và } \cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$S_{A'E'F'} = S_{AEF} \cdot \cos\varphi = \frac{a^2\sqrt{3}}{18} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{18}.$$

**Ví dụ 10:** Cho tam giác ABC vuông tại B,  $AB = 2a$ ,  $BC = a$ . Trên hai tia Ax và Cy vuông góc với mp(ABC) và ở cùng phía đối với (ABC), lần lượt lấy hai điểm A' và C' sao cho  $AA' = 2a$ ,  $CC' = x$ .

a) Xác định x sao cho  $\widehat{A'BC'} = 90^\circ$ .

b) Xác định x sao cho  $\widehat{BA'C} = 90^\circ$ .

c) Cho  $x = 4a$ . Tính  $\cos\varphi$  với  $\varphi$  là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và  $(A'BC')$ .

**Giải**

a) Trên Cy ta lấy điểm C<sub>1</sub> sao cho  $CC_1 = 2a$ .

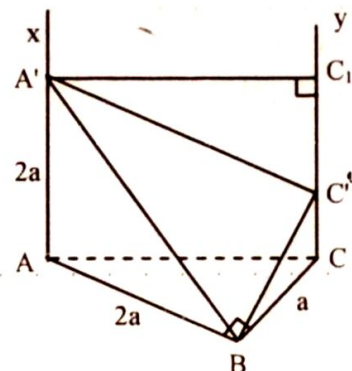
$$A'B^2 = A'A^2 + AB^2 = 8a^2$$

$$BC'^2 = BC^2 + CC'^2 = a^2 + x^2$$

$$A'C'^2 = A'C_1^2 + C_1C'^2$$

$$= 5a^2 + (2a - x)^2 = x^2 - 4ax + 9a^2$$

$$\widehat{A'BC'} = 90^\circ \Leftrightarrow A'C'^2 = A'B^2 + BC'^2.$$



$$\Leftrightarrow x^2 - 4ax + 9a^2 = 8a^2 + a^2 + x^2 \Leftrightarrow x = 0$$

$$b) \widehat{BA'C} = 90^\circ \Leftrightarrow BC'^2 = A'B^2 + A'C'^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + x^2 = 8a^2 + x^2 - 4ax + 9a^2 \Leftrightarrow 4ax = 16a^2 \Leftrightarrow x = 4a$$

$$c) x = 4a, \text{ khi đó } A'C_1^2 + C_1C'^2 = 5a^2 + 4a^2 = 9a^2 \Rightarrow A'C' = 3a$$

$$S_{A'BC'} = \frac{1}{2} \cdot A'B \cdot A'C' = \frac{1}{2} \cdot 2a \sqrt{2} \cdot 3a = 3a^2 \sqrt{2}.$$

$$\cos \varphi = \frac{S_{ABC}}{S_{A'BC'}} = \frac{a^2}{3a^2 \sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

**Ví dụ 11:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a,  $SA \perp (ABCD)$ .

Hai điểm M và N lần lượt thay đổi trên hai cạnh CB và CD, đặt  $CM = x$ ,  $CN = y$ . Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y để:

a) Hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau góc  $45^\circ$ .

b) Hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

**Giải**

a) Ta có  $AM, AN$  cùng vuông góc với  $SA$  nên góc nhọn  $\widehat{MAN}$  là góc giữa hai mặt phẳng (SAM) và (SAN). Hai mặt phẳng đó tạo với nhau góc  $45^\circ$  khi và chỉ khi  $\widehat{MAN} = 45^\circ, N \in CD$ .

$$\Leftrightarrow \widehat{BAM} + \widehat{DAN} = 45^\circ.$$

$$\Leftrightarrow 1 = \tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN})$$

Dùng công thức cộng và có  $\tan \widehat{BAM} = \frac{a-x}{a}$ ,  $\tan \widehat{DAN} = \frac{a-y}{a}$  thì điều

kiện cần tìm là  $2a^2 + xy = 2a(x+y)$

Cách khác: Dùng định lý cosin cho tam giác AMN.

b) Vì  $SA \perp MN$ ,  $(SAM) \perp (ABCD)$  nên:

$(SAM) \perp (SMN)$  khi và chỉ khi  $\widehat{AMN} = 90^\circ$

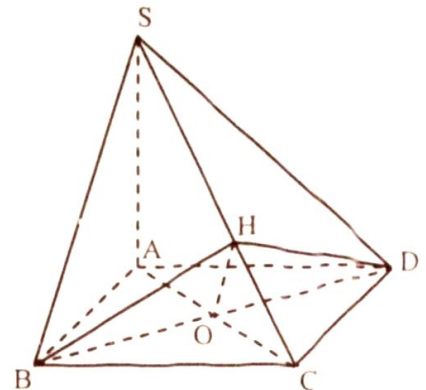
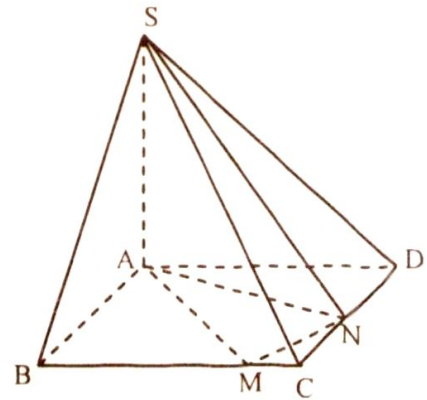
$$\Leftrightarrow a^2 + (a-x)^2 + x^2 + y^2 = a^2 + (a-y)^2 \Leftrightarrow ay = x(a-x).$$

**Ví dụ 12:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a và  $SA \perp (ABCD)$ ,  $SA = x$ . Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau góc  $60^\circ$ .

**Giải**

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trong mặt phẳng (SAC), hạ OH vuông góc với SC, thì mp(BHD) vuông góc với SC. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) bằng góc giữa hai đường thẳng BH và DH.

Ta có  $OH \perp BD$ ,  $OH < OC$  nên  $OH < OB = OD$ , do đó tam giác cân BHD có gốc H từ.





Khi mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau góc  $60^\circ$  khi và chỉ khi:

$$\widehat{BHD} = 120^\circ \Leftrightarrow \widehat{BHO} = 60^\circ \Leftrightarrow BO = OH \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow BO = \sqrt{3} \cdot OC \cdot \frac{SA}{SC} \Leftrightarrow SC = \sqrt{3} \cdot SA.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2a^2} = \sqrt{3} \cdot x \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = a.$$

**Ví dụ 13:** Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau,  $AC = AD = BC = BD = a$  và  $CD = 2x$ . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Chứng minh IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

b) Xác định x sao cho (ABC) vuông góc với (ABD).

**Giải**

a) Tam giác ACB cân đỉnh C và  $IA = IB$  nên  $CI \perp AB$ .

Tương tự  $DI \perp AB$  nên  $AB \perp (CID)$

Do đó  $IJ \perp AB$ .

Tương tự  $CD \perp (AJB)$  nên  $IJ \perp CD$

b) Ta có góc giữa (ABC) và (ABD) là  $\widehat{CID} = 2\widehat{CIJ}$   
 $(BCD) \perp (ACD)$  và  $BJ \perp CD \Rightarrow BJ \perp (ACD)$ .

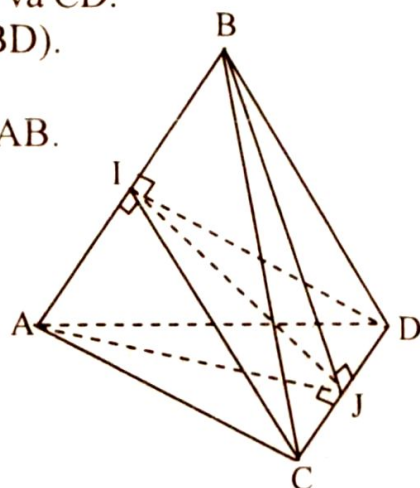
Vậy  $BJ \perp AJ$ .

$$\text{mà } AJ = BJ = \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > x)$$

$$\text{Do đó: } AB = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{2(a^2 - x^2)} \text{ nên } IJ = \sqrt{AJ^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{2}}$$

$$\text{Do đó: } (ABC) \perp (ABD) \Leftrightarrow \widehat{CIJ} = 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow IJ = \frac{CD}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{2}} = x \Leftrightarrow 3x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



### DẠNG 3: LĂNG TRỤ - HÌNH CHÓP

- Lăng trụ đứng khi các cạnh bên vuông góc với mặt đáy. Các mặt xung quanh là hình chữ nhật.

- Lăng trụ đều là lăng trụ đứng và có đáy là đa giác đều. Cần phân biệt với lăng trụ đáy đa giác đều, chỉ có đáy là tam giác đều.

- Hình hộp chữ nhật là lăng trụ đứng và đáy hình chữ nhật. Nếu a, b, c là 3 kích thước thì đường chéo  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

- Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông. Nếu cạnh a thì đường chéo  $d = a\sqrt{3}$ .

- Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau. Hình chiếu của đỉnh lên mặt đáy là tâm của đáy. Chú ý về ngược, xác định tâm của đáy rồi dựng đường vuông góc lên đỉnh.

- Hình chóp cụt đều được tạo ra khi cắt hình chóp đều bởi mặt phẳng song song với đáy.



**Ví dụ 1:** Hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình hộp gì nếu thoả mãn một trong các điều kiện sau?

- Tứ diện  $AB'CD'$  có các cạnh đối bằng nhau.
- Tứ diện  $AB'CD'$  có các cạnh đối vuông góc.
- Tứ diện  $AB'CD'$  là tứ diện đều.

**Giải**

- a) Ta có  $B'D' = BD$ .

Vậy  $AC = B'D' \Leftrightarrow AC = BD$ , khi đó  $ABCD$  là hình chữ nhật. Tương tự ta cũng có  $ABB'A'$  và  $ADD'A'$  là những hình chữ nhật.

Vậy khi tứ diện  $AB'CD'$  có các cạnh đối diện bằng nhau thì  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình hộp chữ nhật.

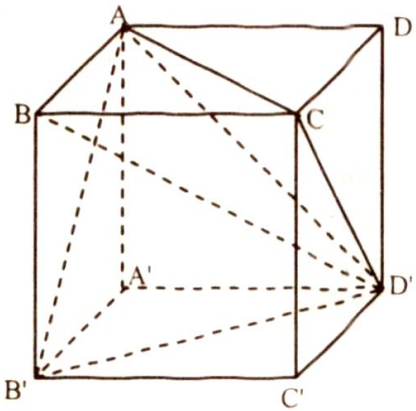
Ngược lại, khi  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình hộp chữ nhật thì dễ thấy tứ diện  $AB'CD'$  có các cạnh đối diện bằng nhau.

- b) Ta có  $BD \parallel B'D'$ . Vậy  $AC \perp B'D' \Leftrightarrow AC \perp BD$ . Khi đó  $ABCD$  là hình thoi. Tương tự ta có  $ABB'A'$  và  $ADD'A'$  là những hình thoi. Vậy hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình hộp thoi (tức sáu mặt của hình hộp là hình thoi). Ngược lại nếu  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình hộp thoi thì  $ABCD$  là hình thoi nên  $AC \in BD$ . Theo tính chất của hình hộp  $BD \parallel B'D'$ , do đó  $AC \perp B'D'$ . Tương tự  $AB' \perp CD'$ ;  $AD' \perp CB'$ .

Do đó tứ diện  $AB'CD'$  có các cạnh đối diện vuông góc.

- c) Khi  $AB'CD'$  là tứ diện đều thì các cạnh đối diện vừa bằng nhau vừa vuông góc; áp dụng kết quả của các câu a) và b) ta có: Khi  $AB'CD'$  là tứ diện đều thì hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình lập phương.

Ngược lại nếu  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình lập phương thì  $AB'CD'$  là tứ diện đều.



**Ví dụ 2:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CC' = c$ . Nếu  $AC' = BD' = B'D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  thì hình hộp đó có phải là hình hộp chữ nhật không? Vì sao?

**Giải**

Theo ví dụ 9 §3 Chương II ta có:

$$AC'^2 + A'C^2 + BD'^2 + B'D^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$$

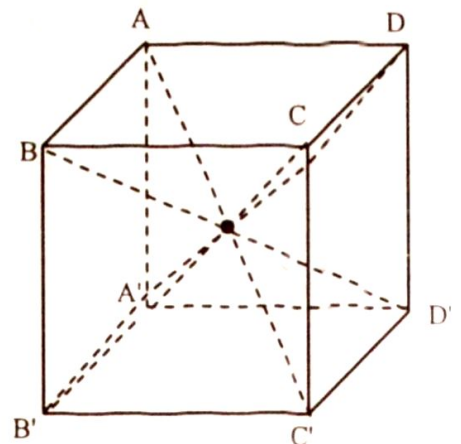
$$\text{mà } AC' = BD' = B'D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\text{nên } A'C = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

tức là bốn đường chéo của hình hộp bằng nhau.

Do  $ACC'A'$  là hình bình hành và  $AC' = A'C$  nên  $ACC'A'$  là hình chữ nhật, tức là  $AA' \perp AC$ .

Tương tự như trên ta có  $BB' \perp BD$ , mà  $BB' \parallel AA'$ .





Vậy  $AA' \perp mp(ABCD)$ . Tương tự ta có  $AB \perp (ADD'A)$ .

Do đó  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình hộp chữ nhật.

**Ví dụ 3:** Chứng minh một hình hộp có:

- 6 mặt là hình chữ nhật thì hình hộp là hình hộp chữ nhật.
- 6 mặt là hình vuông thì hình hộp là hình lập phương.

**Giải**

- Theo giả thiết thì 2 đáy là hình chữ nhật.

Vì hai mặt bên liên tiếp là hình chữ nhật nên giao tuyến là cạnh bên vuông góc với đáy, do đó hình hộp là hình hộp đứng. Vậy hình hộp đã cho là hình hộp chữ nhật.

- Vì hình vuông cũng là hình chữ nhật nên hình hộp cho là hình hộp chữ nhật, hơn nữa các cạnh hình vuông bằng nhau nên tất cả các cạnh hình hộp đều bằng nhau. Vậy hình hộp là hình lập phương.

**Ví dụ 4:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ .

- Chứng minh  $AC'$  vuông góc với hai mặt phẳng  $(A'BD)$  và  $(B'CD')$ .
- Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của  $AC'$ . Chứng minh thiết diện tạo thành là một lục giác đều. Tính diện tích thiết diện đó.

**Giải**

- Ta có  $A$  và  $C'$  cách đều các đỉnh của tam giác  $A'BD$ ,  $B'CD'$  nên thuộc trục của 2 tam giác đó.

Vậy  $AC' \perp (A'BD)$ ,  $(B'CD')$ .

- Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  thì  $MA = MC'$  (vì cùng bằng  $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ ) nên  $M$

thuộc mặt phẳng trung trực  $(\alpha)$  của  $AC'$ .

Tương tự, ta chứng minh được  $N, P, Q, R, S$  cũng có tính chất đó ( $N, P, Q, R, S$  lần lượt là trung điểm của  $CD, DD', D'A', A'B', B'B$ ). Do đó thiết diện của hình lập phương bị cắt bởi  $mp(\alpha)$  là  $MNPQRS$ . Thiết diện là lục

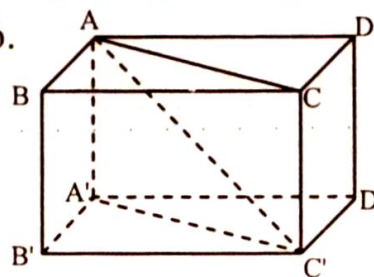
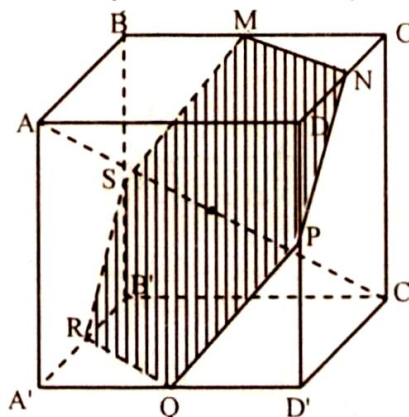
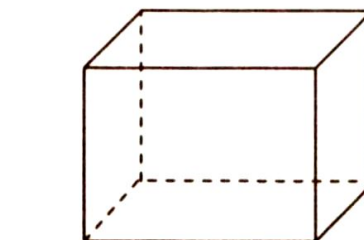
giác đều cạnh bằng  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$  nên có diện tích:  $S = 6 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$ .

**Ví dụ 5:** Một hình hộp đứng có tất cả các cạnh bằng  $a$ , một đường chéo bằng  $a\sqrt{2}$ . Hãy tính diện tích đáy của hình hộp đó.

**Giải**

Tam giác vuông  $ACC'$  có  $CC' = a$ ,

$AC' = a\sqrt{2}$  nên  $AC = a$ .



Diện tích  $S$  của đáy bằng hai lần diện tích hình tam giác đều cạnh  $a$ .

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

**Ví dụ 6:** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại đỉnh  $C$ ,  $CA = a$ ,  $CB = b$ ; mặt bên  $ABB'A'$  là hình vuông. Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua  $C$  và vuông góc với  $AB'$ .

a) Xác định thiết diện của hình lăng trụ đã cho khi cắt bởi  $(P)$ . Thiết diện là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện nói trên.

**Giải**

a) Kẻ đường cao  $CH$  của tam giác vuông  $ABC$  thì  $CH \perp AB'$ . Vì  $ABB'A'$  là hình vuông nên  $AB' \perp A'B$ . Vẽ  $HK \parallel A'B$  thì  $HK \perp AB'$  nên thiết diện là tam giác  $CHK$ .

Do  $CH \perp AB$ ,  $mp(ABB'A') \perp mp(ABC)$

nên  $CH \perp (ABB'A')$ , từ đó tam giác  $CHK$  vuông tại  $H$ .

b)  $S_{CHK} = \frac{1}{2} CH \cdot HK.$

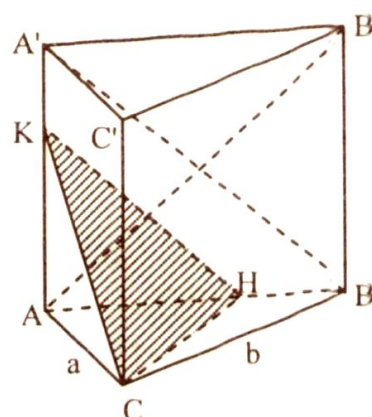
Ta có:  $CH \cdot AB = CA \cdot CB \Rightarrow CH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$AH \cdot AB = a^2 \Rightarrow AH = \frac{a^2}{AB};$$

$$\frac{HK}{A'B} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow HK = A'B \cdot \frac{a^2}{AB^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{2} \cdot a^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 \sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Do đó:  $S_{CHK} = \frac{a^3 b \sqrt{2}}{2(a^2 + b^2)}.$



**Ví dụ 7:** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A_1B_1C_1$  với cạnh đáy bằng  $a$  và cạnh bên  $AA_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ . Tính góc giữa  $AO_1$  và  $OB_1$ , ở đó  $O, O_1$  lần lượt là tâm của hai tam giác đáy  $ABC$  và  $A_1B_1C_1$ .

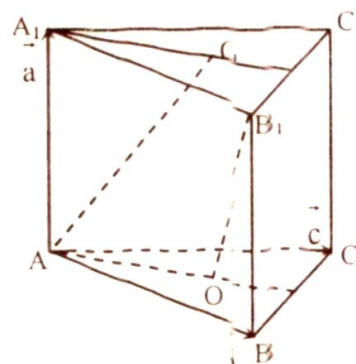
**Giải**

Chọn hệ cơ sở  $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c},$

Gọi  $\alpha$  là góc tạo bởi hai đường thẳng  $AO_1$  và  $OB_1$

$$\cos \alpha = \left| \cos(\overrightarrow{AO_1}, \overrightarrow{OB_1}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AO_1} \cdot \overrightarrow{OB_1}|}{AO_1 \cdot OB_1}$$

Vì lăng trụ tam giác đều nên :





$$AO_1^2 = OB_1^2 = AA_1^2 + A_1O_1^2 = \frac{6a^2}{9} + \frac{a^2}{3} = a^2$$

$$\begin{aligned} \text{và } \overrightarrow{AO_1} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1}) \\ &= \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB_1} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CB_1}) \\ &= \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \frac{1}{3}(3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó : } \overrightarrow{AO_1} \cdot \overrightarrow{OB_1} &= \frac{1}{9}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) \\ &= \frac{1}{9}(9\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c}^2) = \frac{5}{6}a^2. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = \frac{5}{6}.$$

**Ví dụ 8:** Chứng minh một hình chóp là hình chóp đều khi và chỉ khi đáy là đa giác đều và một điều kiện:

- Đường cao hình chóp đi qua tâm của đáy.
- Các cạnh bên tạo với đáy các góc bằng nhau.

**Giải**

Giả sử hình chóp là  $S.A_1A_2...A_n$ , hạ  $SH$  vuông góc với  $mp(A_1A_2...A_n)$ .

- Ta có  $SA_1 = SA_2 = ... = SA_n$

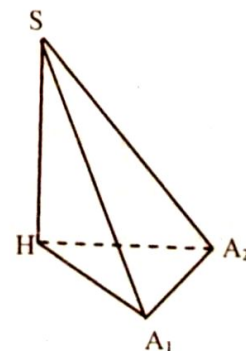
$$\Leftrightarrow HA_1 = HA_2 = ... = HA_n$$

Vì  $A_1A_2...A_n$  là đa giác đều nên điều đó xảy ra khi và chỉ khi  $H$  là tâm của đa giác đều đó. Vậy, một hình chóp là hình chóp đều khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác đều và đường cao của nó đi qua tâm của đáy.

- $\widehat{SA_kH}$  là góc giữa cạnh bên  $SA_k$  với mặt đáy, với  $k = 1, 2, ..., n$

$$\text{Ta có } SA_1 = SA_2 = ... = SA_n \Leftrightarrow \widehat{SA_1H} = \widehat{SA_2H} = ... = \widehat{SA_nH}.$$

Vậy, một hình chóp là hình chóp đều khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên tạo với mặt đáy những góc bằng nhau.



**Ví dụ 9:** Chứng minh:

- Hình chóp tứ giác có 8 cạnh bằng nhau là hình chóp đều.
- Hình chóp có đáy là đa giác đều và có ba cạnh bên bằng nhau thì đó là hình chóp đều.

**Giải**

- Giả sử hình chóp  $S.ABCD$  có 8 cạnh bằng nhau. Đáy  $ABCD$  là một hình thoi. Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .

$$\text{Ta có: } OA = OC; SA = SC \Rightarrow SO \perp AC.$$

$$OB = OD; SB = SD \Rightarrow SO \perp BD.$$

Do đó  $SO \perp mp(ABCD)$  và vì  $SA = SB = SC = SD$

Suy ra  $OA = OB = OC = OD$  hay  $ABCD$  là hình vuông. Vậy hình chóp  $SABCD$  là hình chóp đều.

- b) Giả sử hình chóp  $S.A_1A_2...A_n$  có đáy là đa giác đều, có ba cạnh bên nào đó bằng nhau:  $SA_i = SA_j = SA_k$ . Khi đó nếu gọi  $H$  là hình chiếu của  $S$  lên đáy thì  $HA_i = HA_j = HA_k$ , vậy  $H$  phải trùng với tâm của đáy  $A_1A_2...A_n$ . Suy ra hình chóp đã cho là hình chóp đều.

**Ví dụ 10:** Chứng minh trong một hình chóp cụt đều thì các mặt xung quanh là các hình thang cân bằng nhau.

**Giải**

Giả sử hình chóp cụt đều  $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$  sinh từ hình chóp đều  $S.A_1A_2...A_n$ .

Do mỗi mặt bên của hình chóp đều  $S.A_1A_2...A_n$  là các tam giác cân bằng nhau mà mặt phẳng  $(A'_1A'_2...A'_n)$  song song với mặt phẳng  $(A_1A_2...A_n)$  nên  $A'_1A'_2 \parallel A_1A_2, \dots, A'_nA'_1 \parallel A_nA_1$ . Ngoài ra  $A'_1A'_2 = A'_2A'_3 = \dots = A'_nA'_1$  và  $A_1A'_1 = A_2A'_2 = \dots = A_nA'_n$ .

Vậy các mặt bên của hình chóp cụt đều là những hình thang cân bằng nhau.

#### DẠNG 4: TỔNG HỢP VUÔNG GÓC

- Vận dụng tổng hợp quan hệ song song và vuông góc để giải toán.
- Khi giải bằng công cụ vector phải chọn được hệ vector cơ sở
- Để tính diện tích, ngoài cách dùng công thức trực tiếp ta có dùng công thức chiếu  $S' = S \cdot \cos \varphi$ , hoặc chia cắt, bù trừ các phần diện tích, tỉ số đồng dạng, ...

**Ví dụ 1:** Tứ diện  $ABCD$  có cạnh  $AD \perp mp(ABC)$  và tam giác  $ABC$  vuông ở  $C$ .

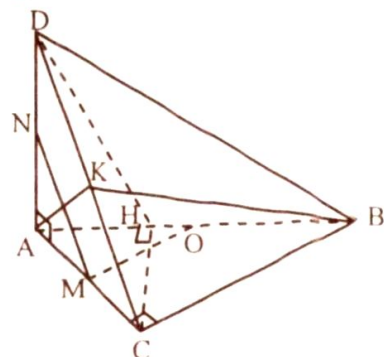
- a) Chứng minh rằng các mặt của tứ diện  $ABCD$  là các tam giác vuông.
- b) Trong  $\triangle ABC$  và  $\triangle DAC$  vẽ các đường cao  $CH$  và  $AK$ . Chứng minh rằng  $\triangle CHD, \triangle AKB$  là tam giác vuông.
- c) Gọi  $M, N$  và  $O$  lần lượt là trung điểm của  $AC, AD, AB$ . Chứng minh rằng  $\triangle OMN, \triangle KMB, \triangle KNO$  là tam giác vuông.

**Giải**

- a) Theo giả thiết:  $\triangle ABC$  vuông ở  $C, \triangle ACD$  vuông ở  $A, \triangle ABD$  vuông ở  $A$ .

Và  $AD \perp mp(ABC)$  nên  $AD \perp BC$  và do  $BC \perp AC$  nên  $BC \perp mp(ACD)$   
 $\Rightarrow BC \perp DC$ .

Vậy  $\triangle BCD$  vuông ở  $C$ ;





b)  $CH \perp AD$  và  $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp HD$ .

Vậy  $\triangle CHD$  vuông ở H.

Do  $BC \perp AK$ ,  $CD \perp AK$  nên:

$AK \perp mp(BCD) \Rightarrow AK \perp KB$ .

Vậy  $\triangle AKB$  vuông ở K.

c) Ta có:  $OM \parallel BC \Rightarrow OM \perp mp(ACD) \Rightarrow OM \perp MN$ .

Vậy  $\triangle OMN$  vuông ở M.

Và do:  $KN = \frac{1}{2}AD$ ,  $KM = \frac{1}{2}AC$ ,  $MN = \frac{1}{2}CD$  suy ra:

$\triangle KMN \sim \triangle ACD$  nên  $\triangle KMN$  vuông ở K.

Theo chứng minh trên:  $OM \perp mp(ACD) \Rightarrow OM \perp NK$  và  $MK \perp NK$

$\Rightarrow NK \perp mp(KMO) \Rightarrow NK \perp OK$  hay  $\triangle KNO$  vuông ở K.

**Ví dụ 2:** Cho tứ diện ABCD có các cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Chứng minh rằng:

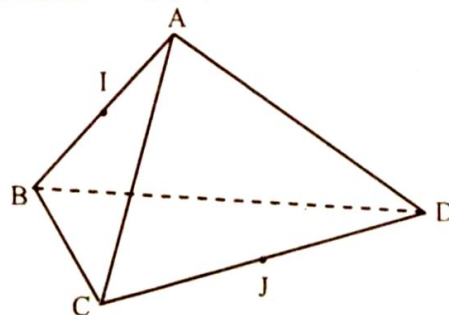
a) Ba đường trung bình của tứ diện bằng nhau.

b) Nếu  $AB = AC + AD$  thì  $\widehat{ABC} + \widehat{CBD} + \widehat{DBA} = 90^\circ$ .

**Giải**

a) Gọi I, J là trung điểm AB, CD.

$$\begin{aligned} IJ^2 &= \overrightarrow{IJ}^2 = (\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI})^2 \\ &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2 \\ &= \frac{1}{4} (AC^2 + AB^2 + AD^2) \text{ vì } AB, AC, AD \text{ đôi một vuông góc.} \end{aligned}$$



Tương tự thì có 3 đường trung bình cùng bằng  $\frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2 + AD^2}$ .

b) Trên các tia AC và AD lần lượt lấy các điểm

P và R sao cho:

$AP = AR = AB$  và vẽ hình vuông APQR

$\Rightarrow DR = AC$  và  $CP = AD$ .

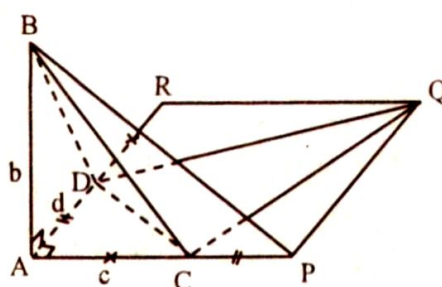
Khi đó, ta có:

$\triangle ABC = \triangle RQD$  và  $\triangle ABD = \triangle PQC$

$\Rightarrow \triangle BCD = \triangle QDC$ .

Do đó:  $\widehat{ABC} + \widehat{CBD} + \widehat{DBA} = \widehat{RQD} + \widehat{DQC} + \widehat{CQD} = \widehat{RQP} = 90^\circ$

Cách khác: Dùng định lý côsin.



**Ví dụ 3:** Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông ABCD vuông tại A và D, có  $AB = 2a$ ,  $AD = DC = a$ , có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và  $SA = a$ .

a) Chứng minh (SAD) vuông góc với (SDC), (SAC) vuông góc với (SCB).

b) Gọi  $\varphi$  là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD), tính  $\tan \varphi$ .

- c) Mặt phẳng chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC) cắt hình chóp. Xác định và tính diện tích thiết diện.

**Giải**

- a) Ta có  $CD \perp AD$ ;  $CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$ .

Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Ta có AICD là hình vuông và IBCD là hình bình hành.

Vì  $DI \parallel CB$  và  $DI \perp AC$  nên  $AC \perp CB$ .

Do đó  $CB \perp (SAC)$ . Vậy  $(SBC) \perp (SAC)$ .

- b) Ta có  $CB \perp CA$ ,  $CB \perp SC$

$$\text{nên } \varphi = \widehat{SCA} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- c)  $DI \perp AC$ ;  $DI \perp SA \Rightarrow DI \perp (SAC) \Rightarrow (SDI) \perp (SAC)$ .

Do đó thiết diện với hình chóp là tam giác đều SDI có cạnh bằng  $a\sqrt{2}$ .

Gọi H là tâm hình vuông AICD và có  $SH \perp DI$  và  $SH = \frac{DI\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ .

$$\text{Tam giác SDI có diện tích: } S = \frac{1}{2} SH \cdot DI = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

**Ví dụ 4:** Cho hình vuông ABCD tâm O, cạnh a. Trên hai tia Bx và Dy vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và cùng nằm về một phía của mặt phẳng (ABCD) lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho:  $BM \cdot DN = \frac{a^2}{2}$ . Đặt

$$\widehat{BOM} = \alpha, \widehat{DON} = \beta.$$

- a) Chứng minh  $\tan \alpha \cdot \tan \beta = 1$ . Kết luận được gì về hai góc  $\alpha$  và  $\beta$ ?

- b) Chứng minh (ACM) vuông góc với (CAN).

- c) Gọi H là hình chiếu của O trên MN. Chứng minh rằng AH vuông góc với HC và mặt phẳng (AMN) vuông góc với (CMN).

**Giải**

$$\text{a) } \tan \alpha = \frac{BM}{OB}, \tan \beta = \frac{DN}{OD};$$

$$OB = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

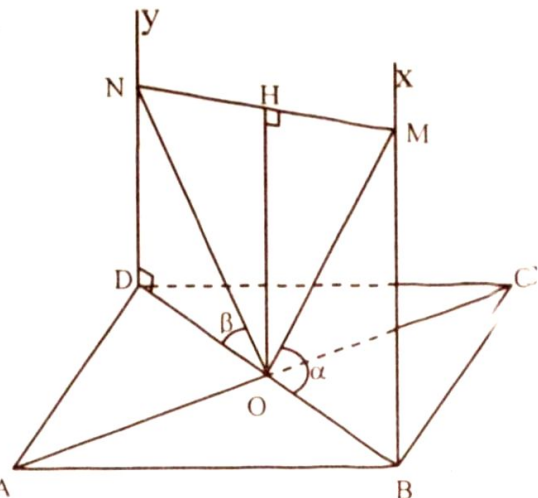
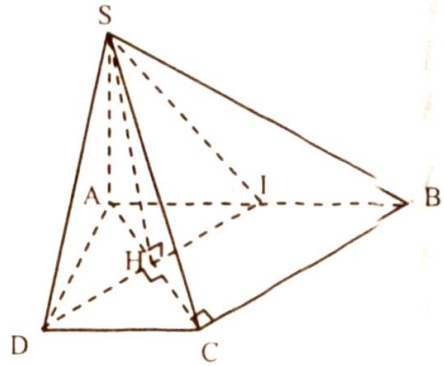
$$\text{Theo giả thiết } BM \cdot DN = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{nên ta có: } \tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{BM \cdot DN}{OB \cdot OD} = 1$$

$$\text{Do đó } \tan \alpha = \cot \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ.$$

- b) Ta có  $AC \perp (Bx, Dy)$  nên  $OM \perp AC$  và  $ON \perp AC$ .

Vậy góc  $\widehat{MON}$  là góc giữa hai mặt phẳng (ACM) và (ACN).





Trong (Bx, Dy) ta có:  $\widehat{MON} = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$ .

Do đó:  $(ACM) \perp (ACN)$ .

- c) Ta có:  $OM = \frac{OB}{\cos \alpha}$ ,  $ON = \frac{OD}{\cos \beta}$ . Vì OH là đường cao trong tam giác vuông MON nên:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}{OB^2} = \frac{1}{OB^2}$$

nên  $OH = OB \Rightarrow OH = OA = OC$ . Do đó  $AH \perp HC$ .

Vì  $MN \perp OH$  và  $MN \perp AC$  nên  $MN \perp HA, HC$ .

Do đó góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (CMN) bằng  $90^\circ$ .

Vậy:  $(AMN) \perp (CMN)$ .

**Ví dụ 5:** Cho tam giác ABC vuông tại A,  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ . Hai tia Bx và Cy cùng vuông góc với mp(ABC) và nằm về một phía đối với mặt phẳng đó. Trên Bx, Cy lần lượt lấy các điểm B', C' sao cho  $BB' = a$ ,  $CC' = m$ .

- a) Với giá trị nào của m thì  $AB'C'$  là tam giác vuông?  
b) Khi tam giác  $AB'C'$  vuông tại B', hạ  $AH \perp BC$ . Chứng minh  $B'C'H$  là tam giác vuông. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và  $(AB'C')$ .

**Giải**

- a) Ta có  $AC^2 = 3a^2$ ,  $AB'^2 = 2a^2$ ,  
 $AC'^2 = 3a^2 + m^2$ ,  $B'C'^2 = 4a^2 + (m - a)^2$

Xét 3 trường hợp:

- Tam giác vuông  $AB'C'$  vuông ở A:

$$5a^2 + m^2 - 2ma = 2a^2 + 3a^2 + m^2$$

$$\Leftrightarrow -2ma = 0 \Leftrightarrow m = 0$$

- Tam giác  $AB'C'$  vuông ở C':

$$2a^2 = 3a^2 + m^2 + 4a^2 + (m - a)^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - ma + 3a^2 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

- Tam giác  $AB'C'$  vuông ở B'

$$2a^2 + 4a^2 + (m - a)^2 = 3a^2 + m^2 \Leftrightarrow m = 2a$$

- b) Giả sử tam giác  $AB'C'$  vuông ở B', tức là  $m = 2a$ .

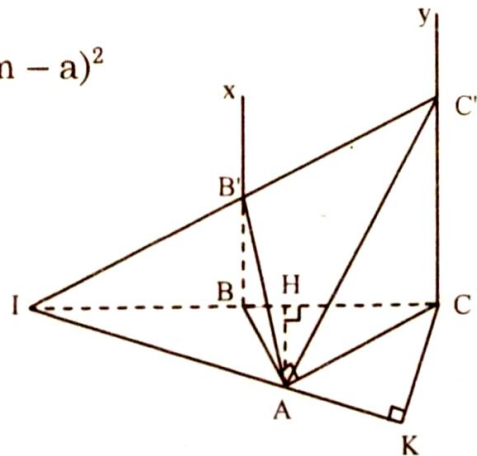
Vì  $AH \perp BC$  nên  $BH \cdot BC = AB^2 = a^2 \Rightarrow BH = \frac{a}{2}$

$$HC = \frac{3a}{2} \text{ và } B'H^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

$$CH^2 = \frac{9a^2}{4} + 4a^2 = \frac{25a^2}{4}; B'C'^2 = 5a^2$$

Do đó  $B'H^2 + B'C'^2 = CH^2$  nên tam giác  $B'C'H$  vuông tại B'.

Gọi I là giao điểm của  $B'C'$  và BC. Do  $BB' \parallel CC'$ ,  $BB' = a$ ,  $CC' = 2a$  nên  $BC = BI$ ,  $B'C' = B'I$ .



Ta có tam giác AIC là hình chiếu của tam giác AIC'. Gọi  $\varphi$  là góc giữa  $mp(ABC)$  và  $mp(AB'C')$  thì:

$$S_{AIC} = S_{AIC'} \cdot \cos \varphi, \text{ ta có: } S_{AIC} = 2S_{ABC} = a^2 \sqrt{3}.$$

$$\text{Và } S_{AIC'} = \frac{1}{2} IC' \cdot AB' = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{2} = a^2 \sqrt{10}$$

$$\text{nên } \cos \varphi = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

**Ví dụ 6:** Cho hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) có giao tuyến  $\Delta$ . Lấy A, B cùng thuộc  $\Delta$  và lấy  $C \in (P)$ ,  $D \in (Q)$  sao cho  $AC \perp AB$ ,  $BD \perp AB$  và  $AB = AC = BD$ . Xác định thiết diện của tứ diện ABCD khi cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm A và vuông góc với CD. Tính diện tích thiết diện khi  $AC = AB = BD = a$ .

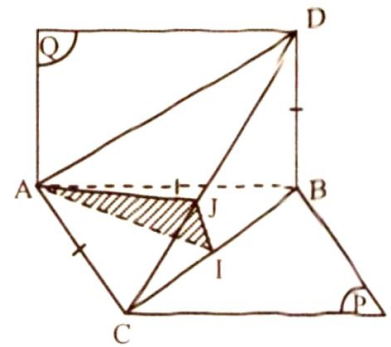
**Giải**

Gọi I là trung điểm của BC thì  $AI \perp BC$ . Do  $BD \perp mp(ABC)$  nên  $AI \perp CD$  (định lý ba đường vuông góc). Trong  $mp(CDB)$ , kẻ IJ vuông góc với CD ( $J \in CD$ ) thì  $mp(AIJ)$  chính là mặt phẳng  $(\alpha)$  và thiết diện phải tìm là tam giác AIJ vuông tại I.

$$\text{Ta có } S_{AIJ} = \frac{1}{2} AI \cdot IJ.$$

$$\text{với } AI = \frac{1}{2} BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad \frac{IJ}{DB} = \frac{CI}{CD} \Rightarrow IJ = \frac{CI}{CD} \cdot DB = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{Vậy } S_{AIJ} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{12}.$$



**Ví dụ 7:** Cho  $d$  là một đường thẳng vuông góc với  $mp(\alpha)$  và cắt  $(\alpha)$  tại O. Giả sử A là một điểm cố định trên  $d$ , B và C là hai điểm di động trên một đường thẳng  $d'$  cố định trên  $(\alpha)$  và không đi qua O sao cho  $mp(B; d) \perp m(C; d)$ . Gọi A', B', C' lần lượt là chân các đường cao AA', BB', CC' của  $\Delta ABC$ .

a) Chứng minh rằng tích  $A'B \cdot A'C$  không đổi và trực tâm H của  $\Delta ABC$  luôn cố định.

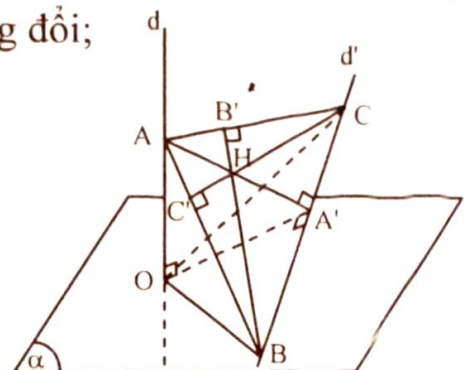
b) Chứng minh rằng  $(AB^2 + AC^2 - BC^2)$  không đổi;

c) Tìm tập hợp các điểm B' và C'.

**Giải**

a) Vì  $AA' \perp BC$  nên  $OA' \perp BC$ .

Theo giả thiết  $(B; d) \perp (C; d)$  và do  $(\alpha) \perp (C; d)$  nên giao tuyến  $OB \perp (C; d) \Rightarrow OB \perp OC$ .





Do O và d' cố định nên A' cố định. Trong tam giác vuông BOC có:

$$A'B \cdot A'C = OA'^2 \text{ (bằng hằng số).}$$

Do O là hình chiếu của B xuống mp(C; d) và  $BB' \perp AC$  nên  $OB' \perp AC \Rightarrow AC \perp mp(OBB') \Rightarrow AC \perp OH$ . Mặt khác do  $BC \perp mp(OAA')$  nên  $BC \perp OH \Rightarrow OH \perp mp(ABC) \Rightarrow OH \perp AA'$ . Vì tam giác vuông OAA' cố định nên H cố định.

b) Ta có:  $AB^2 + AC^2 - BC^2 = (AO^2 + OB^2) + (AO^2 + OC^2) - (OB^2 + OC^2) = 2AO^2$ : không đổi.

c) Các điểm B', C' thuộc mặt phẳng cố định (A; d') và đều nhìn đoạn thẳng AH cố định dưới một góc vuông nên chúng đều thuộc đường tròn (C) đường kính AH trong mặt phẳng (A; d').

Do  $AA' \perp BC$  nên BA và BH không thể vuông góc với AA' nên  $B' \equiv A, H$ , tương tự  $C' \equiv A, H$ .

Ngược lại, lấy  $B' \in (C) \setminus \{A; H\}$ . Gọi  $C = AB' \cap d'$  và  $B = HB' \cap d'$ . Ta phải chứng minh:  $mp(C; d) \perp mp(B; d)$ .

Thật vậy, do  $AC \perp BB', AC \perp OH$

nên  $AC \perp mp(OBB') \Rightarrow OB \perp AC$ .

Mặt khác,  $OB \perp OA \Rightarrow OB \perp mp(OAC)$

$\Rightarrow mp(B; d) \perp mp(C; d)$ .

Chứng minh tương tự đối với C'. Vậy tập hợp các điểm B', C' là đường tròn (C) trừ hai điểm A, H và trong mặt phẳng (A; d')

**Ví dụ 8:** Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AA', AC, A'B'. Hãy dựng và tính diện tích của thiết diện của hình hình lăng trụ khi cắt bởi mp(MNP).

**Giải**

Đường thẳng MN cắt A'C' tại I và CC' tại J.

Đường thẳng IP cắt B'C' tại Q và QJ cắt BC tại R.

Thiết diện là ngũ giác NMPQR. Ta có  $A'I = A'P = \frac{a}{2}$

và  $\widehat{IA'P} = 120^\circ$  nên  $\widehat{A'IP} = 30^\circ$ .

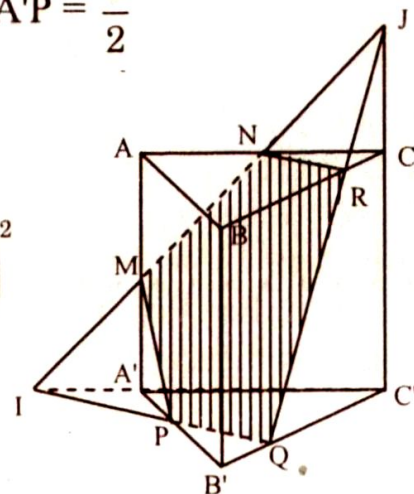
Do đó tam giác IQC' vuông tại Q.

Và vì vậy  $\Delta IQJ$  vuông tại Q.

$$JQ^2 = JC'^2 + C'Q^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = 5\left(\frac{3a}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow JQ = \frac{3a\sqrt{5}}{4}$$

$$IQ = \frac{\sqrt{3}}{2} IC' = \frac{3a\sqrt{3}}{4}.$$



$$\text{Vậy } S = \frac{1}{2} JQ \cdot IQ = \frac{1}{2} \frac{3a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a\sqrt{5}}{4} = \frac{9a^2\sqrt{15}}{32}.$$

Ta có tam giác JRN đồng dạng với  $\Delta JQI$  với tỉ số  $\frac{1}{3}$  nên diện tích của

$$JRN \text{ là } S_1 = \frac{1}{9}S$$

Mặt khác  $\frac{IM}{IJ} = \frac{1}{3}, \frac{IP}{IQ} = \frac{2}{3}$  nên nếu gọi  $S_2$  là diện tích tam giác IMP thì

$$S_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} S = \frac{2}{9}S. \text{ Gọi } S_3 \text{ là diện tích thiết diện thì}$$

$$S_3 = S - S_1 - S_2 = S - \frac{1}{9}S - \frac{2}{9}S = \frac{2}{3}S = \frac{2}{3} \cdot \frac{9a^2\sqrt{15}}{32} = \frac{3a^2\sqrt{15}}{16}.$$

**Ví dụ 9:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh là a. Gọi E, I và M lần lượt là trung điểm của AD, AB và CC'.

a) Tính góc  $\varphi$  giữa hai mặt phẳng (ABCD) và (EFM).

b) Tính diện tích của thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (EFM).

**Giải:**

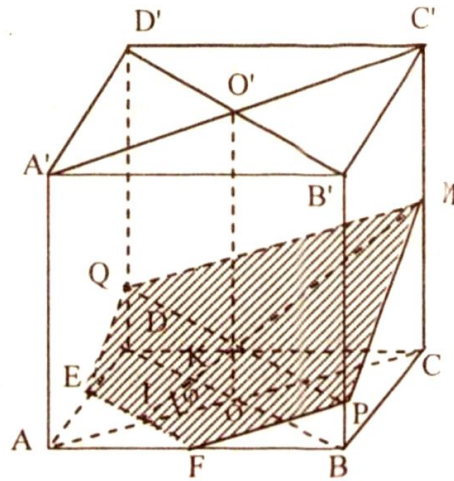
a) Ta có giao tuyến của (ABCD) và (EFM) là EF vuông góc với AC nên EF vuông góc IM.

$$\varphi = \widehat{MIC}$$

$$\tan \varphi = \frac{CM}{IC} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{1}{1 + \frac{2}{9}} = \frac{9}{11}$$

$$\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{11}}{11}$$



b) Gọi O, O' lần lượt là tâm của các hình vuông ABCD và A'B'C'D'. IM cắt OO' tại K

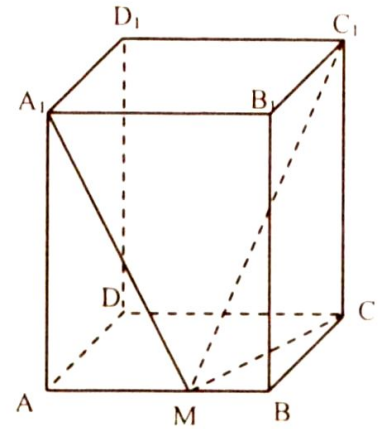
Đường thẳng qua K song song với BD cắt BB' và DD' tại P và Q. Thiết diện là ngũ giác EFPMQ.

Gọi S là diện tích thiết diện EFPMQ và S' là diện tích hình chiếu HFBCD của thiết diện.

$$\text{Ta có: } S' = \frac{7a^2}{8} = S \cos \varphi \text{ nên } S = \frac{7a^2}{8} \cdot \frac{\sqrt{11}}{3} = \frac{7a^2\sqrt{11}}{24}.$$



**Ví dụ 10:** Cho lăng trụ tứ giác đều  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  có chiều cao bằng nửa cạnh đáy. Với  $M$  là một điểm trên cạnh  $AB$ , tìm giá trị lớn nhất của góc  $\widehat{A_1MC_1}$ .



**Giải**

Chọn cơ sở

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA_1} = \vec{c}.$$

Gọi chiều cao là  $h$  thì đáy hình vuông cạnh  $2h$

$M \in AB$  nên có số  $\alpha$  sao cho:  $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} = \alpha \vec{a}$ , với  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

$$\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AM} = \vec{c} - \alpha \vec{a}$$

$$\overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = (1 - \alpha)\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$MA_1^2 = (\vec{c} - \alpha \vec{a})^2 = \vec{c}^2 - 2\alpha \vec{a} \cdot \vec{c} + \alpha^2 \vec{a}^2 = h^2(1 + 4\alpha^2)$$

$$MC_1^2 = [(1 - \alpha)\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}]^2 = (1 - \alpha)^2 \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 = h^2[4(1 - \alpha)^2 + 5]$$

$$\text{Do đó } MA_1 = h\sqrt{1 + 4\alpha^2} \text{ và } MC_1 = h\sqrt{4(1 - \alpha)^2 + 5}$$

$$\overrightarrow{MA_1} \cdot \overrightarrow{MC_1} = (\vec{c} - \alpha \vec{a})[(1 - \alpha)\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}] = \vec{c}^2 - \alpha(1 - \alpha)\vec{a}^2 = h^2(2\alpha - 1)^2$$

$$\cos(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MC_1}) = \frac{(2\alpha - 1)^2}{\sqrt{(1 + 4\alpha^2)[4(1 - \alpha)^2 + 5]}} \geq 0$$

Góc  $\varphi$  là góc tạo bởi hai đường thẳng  $MA_1$  và  $MC_1$  thì  $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ .

$$\text{Do đó } \cos \varphi = |\cos(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MC_1})| = \frac{(2\alpha - 1)^2}{\sqrt{(1 + 4\alpha^2)[4(1 - \alpha)^2 + 5]}} \geq 0$$

Vậy  $\varphi$  lớn nhất  $\Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$  (thoả mãn) nên  $M$  là trung điểm của  $AB$ .

### C. BÀI LUYỆN TẬP

#### 1. Các mệnh đề Đ, S ?

a)  $\alpha, \beta \perp \gamma \Rightarrow \alpha \parallel \beta$

b)  $\alpha, \beta \perp \gamma \Rightarrow \alpha \perp \beta$

c)  $\alpha \supset a, a \perp \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$

d)  $\alpha \supset a, b; a, b \perp \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$

**ĐS:** a) S b) S c) Đ d) Đ

#### 2. Các mệnh đề Đ, S ?

a) Hình lăng trụ có 2 mặt bên hình chữ nhật là lăng trụ đứng

b) Hình lăng trụ có các mặt bên hình chữ nhật là lăng trụ đứng

c) Qua 1 đường thẳng có duy nhất 1 mặt phẳng vuông góc với 1 mặt phẳng cho trước

d) Hình chóp có đáy đa giác đều và 3 cạnh bên bằng nhau là hình chóp đều.

**ĐS:** a) S b) Đ c) S d) Đ

3. Tứ diện SABC có ABC là tam giác vuông cân tại B,  $AC = 2a$ , cạnh SA vuông góc (ABC) và  $SA = a$ .

a) Chứng minh  $mp(SAB) \perp mp(SBC)$

b) Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

**ĐS:** b)  $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

4. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh:

a)  $(ABC'D') \perp (A'B'CD)$  b)  $(AA'CC') \perp (CB'D')$

5. Chứng minh tất cả những mặt phẳng đi qua một điểm A cho trước và vuông góc với (P) cho trước đều đi qua một đường thẳng cố định.

**ĐS:** đường thẳng qua A và vuông góc với mp(P).

6. Cho tam giác đều ABC cạnh a, I là trung điểm của BC, D là điểm đối xứng A qua I. Dựng đoạn  $SD = a\sqrt{6}/2$  vuông góc với (ABC).

a) Chứng minh:  $mp(SBC) \perp mp(SAD)$

b) Chứng minh:  $mp(SAB) \perp mp(SAC)$ .

**HD:** Chứng minh mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

7. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a. Cắt hình lập phương bởi mặt trung trực của BD'. Xác định và tính diện tích thiết diện.

**ĐS:**  $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$

8. Cho hình chóp S.ABCD đáy hình vuông cạnh x,  $SA = a$  vuông góc (ABCD). Định x để (SBC) hợp (SCD) góc  $60^\circ$ .

**ĐS:**  $x = a$

9. Cho hình chóp S.ABCD đáy hình chữ nhật tâm O mà  $SO = h$  vuông góc đáy,  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ .

a) Tính góc giữa (SAB), (SCD). b) Tính h theo a để  $(SAB) \perp (SCD)$ .

**ĐS:** b)  $h = a$

10. Cho tứ giác ABCD nằm trên mặt phẳng (P) hợp với mặt phẳng (Q) một góc  $\varphi$ . Gọi A'B'C'D' là hình chiếu của ABCD lên (Q). Chứng minh:  $S(A'B'C'D') = S(ABCD) \cdot \cos \varphi$ .

**HD:** kẻ diện tích tứ giác thành 2 tam giác

11. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' tâm O, có 3 kích thước a, b, c. Xét tứ diện AB'CD', tính diện tích thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua tâm O và song song (ABC).

**ĐS:**  $\frac{1}{2}ab$

12. Hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các cạnh đều bằng nhau.

a) Chứng minh rằng  $AC \perp B'D'$ ,  $AB' \perp CD'$  và  $AD' \perp CB'$ .

b) Khi nào mặt phẳng (AA'C'C) vuông góc với mặt phẳng (BB'D'D)?



**ĐS:** b) Hai mặt phẳng  $(AA'C'C)$  và  $(BB'D'D)$  vuông góc với nhau khi hình hộp  $ABCD$ .  $A'B'C'D'$  là hình lập phương.

13. Cho tam giác vuông  $ABC$  có cạnh huyền  $BC$  thuộc  $mp(P)$ . Gọi  $\beta, \gamma$  là góc hợp bởi  $AB, AC$  với  $(P)$ . Tính tang của góc  $\alpha$  là góc hợp bởi hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(P)$ .

**HD:** Chứng minh hệ thức:  $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma$

14. Cho hình tứ diện  $ABCD$  có hai mặt  $(ABC), (ABD)$  cùng vuông góc với đáy  $(DBC)$ . Vẽ các đường cao  $BE, DF$  của tam giác  $BCD$ ; đường cao  $DK$  của tam giác  $ACD$ .

a) Chứng minh:  $AB \perp (BCD)$

b) Chứng minh  $(ABE), (DFK) \perp (ADC)$

c) Gọi  $O, H$  là trực tâm tam giác  $BCD$  và  $ACD$ . Chứng minh  $OH \perp (ADC)$ .

15. Hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $D$ ,  $AB = 2a, AD = DC = a, SA = b$  và vuông góc với đáy.

a) Chứng minh  $(SAD) \perp (SDC), (SAC) \perp (SCB)$

b) Tính diện tích thiết diện cắt bởi  $mp$  qua  $SD$ , vuông góc  $(SAC)$ .

**HD:** gọi  $O$  là trung điểm của  $AD$  thì  $ADCO$  là hình vuông và  $OBC$  là tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $O$ .

16. Hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$  tâm  $O$ , các cạnh bên đều bằng  $a$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $AB$  và vuông góc với  $(SDC)$

a) Xác định chân đường vuông góc hạ từ  $O$  đến  $(SCD)$

b) Mặt phẳng  $(P)$  cắt  $SC, SD$  tại  $M, N$ . Hãy tính diện tích của tứ giác  $ABMN$ .

17. Cho tam giác  $ABC$  vuông cân đỉnh  $B$  và  $AB = a$ , đoạn  $SA$  vuông góc với  $(ABC)$  và  $SA = a\sqrt{3}$ . Gọi  $E$  và  $F$  lần lượt là trung điểm của  $SC$  và  $SB$ ,  $M$  là một điểm trên đoạn  $AB$ . Đặt  $AM = x$  ( $0 \leq x < a$ ). Gọi  $(P)$  là mặt phẳng chứa  $EM$  và vuông góc với  $(SAB)$ .

a) Chứng minh  $FM = \sqrt{x^2 - ax + a^2}$ .

b) Tính diện tích thiết diện cắt tứ diện  $SABC$  bởi  $(P)$  theo  $a$  và  $x$ .

c) Tìm tập hợp các hình chiếu của  $S$  lên  $(P)$  khi  $M$  di động trên  $AB$ .

18. Với điều kiện nào thì hình chiếu của một góc vuông lên mặt phẳng là một góc vuông.

**ĐS:** góc vuông đã cho có ít nhất một cạnh song song hay nằm trên mặt phẳng chiếu.

19. Cho hình chóp cắt đều  $A'B'C'.ABC$  có cạnh đáy nhỏ  $A'B' = a$  và cạnh đáy lớn  $AB = b$ , các cạnh bên bằng  $c$ . Tính góc giữa các cạnh bên, các mặt bên với đáy.

20. Cho hình chóp cắt đều  $A'B'C'D'.ABCD$  có cạnh đáy nhỏ  $A'B' = a$  và cạnh đáy lớn  $AB = b$ , các cạnh bên cùng hợp với đáy góc  $60^\circ$ .

a) Tính diện tích mặt chéo  $AA'C'C$

b) Tính góc giữa các mặt bên với đáy

**HD:** a) mặt chéo là hình thang cân

b) gọi 2 trung điểm  $M$  và  $M'$  của  $AB$  và  $A'B'$ . Xác định hình chiếu của  $MM'$  lên đáy.

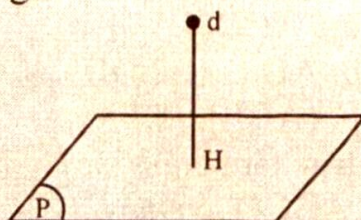
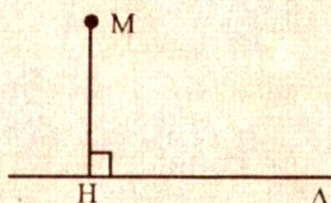


## §5. KHOẢNG CÁCH

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

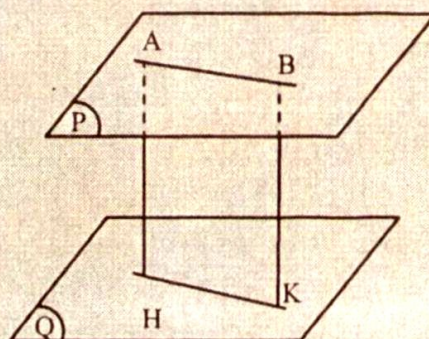
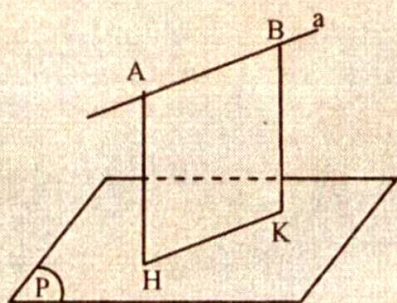
- Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó trên đường thẳng.

- Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó trên mặt phẳng.



- Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của đường thẳng đến mặt phẳng.

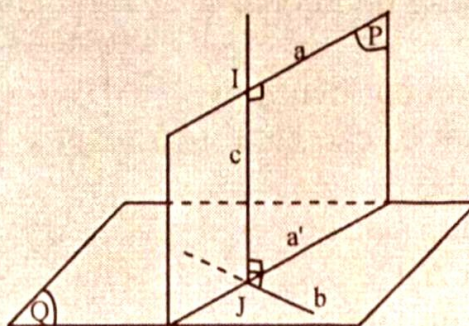
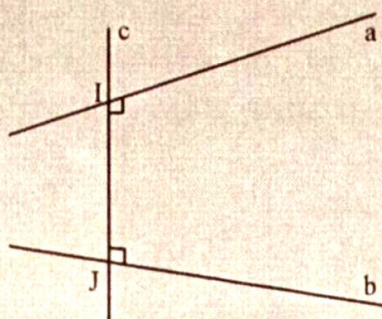
- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.



- Đường thẳng vuông góc với 2 đường thẳng chéo nhau gọi là đường vuông góc chung của 2 đường thẳng chéo nhau.

- Nếu đường vuông góc chung cắt hai đường thẳng chéo nhau tại I và J thì đoạn thẳng IJ gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau.

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.



- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó, chứa đường thẳng còn lại.



- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

• Chú ý: - Khoảng cách giữa 2 yếu tố điểm, đường thẳng, mặt phẳng là khoảng cách bé nhất giữa hai điểm thuộc 2 yếu tố đó.

- Các kí hiệu thường dùng:  $d(M; \Delta)$ ,  $d(M; (P))$ ,  $d(a; (P))$ ,  $d(a; b)$ ,  $d((P); (Q))$  tương ứng khoảng cách 2 yếu tố.

## B. PHÂN DẠNG TOÁN

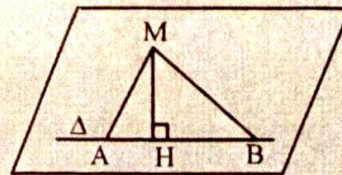
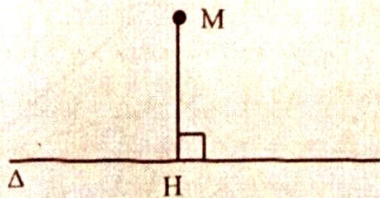
### DẠNG 1: KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẪNG

• Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng  $\Delta$ :

- Hạ  $MH \perp \Delta$  thì  $d(M; \Delta) = MH$

- Nếu có mặt phẳng  $(M; \Delta)$  và A, B thuộc  $\Delta$  thì MH là đường cao của tam giác MAB.

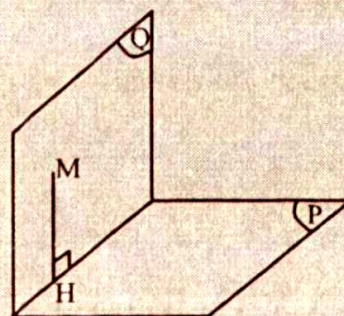
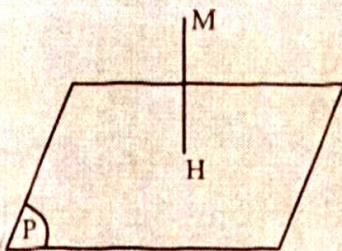
- Để tính đoạn MH ta có thể dùng hệ thức lượng trong tam giác, tam giác vuông, quan hệ diện tích, tam giác đồng dạng, quan hệ song song, ...



• Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng  $(P)$ :

- Hạ  $MH \perp (P)$  thì  $d(M; (P)) = MH$ .

- Ngoài cách xác định hình chiếu thông thường, ta có thể sử dụng quan hệ song song, đặc biệt hơn là phải tìm mặt phẳng  $(P)$  chứa M, vuông góc với  $(P)$  lúc đó H là hình chiếu trên giao tuyến d của  $(P)$  và  $(Q)$ .



**Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC với  $AB = 7\text{cm}$ ,  $BC = 5\text{cm}$ ,  $CA = 8\text{cm}$ . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  tại A, lấy điểm O sao cho  $AO = 4\text{cm}$ . Tính khoảng cách từ điểm A và điểm O đến đường thẳng BC.

ABC



**Giải:**

Dựng AH là đường cao của tam giác ABC thì:  $d(A, BC) = AH$ .

Theo công thức Hêrông, diện tích S của tam giác ABC là:

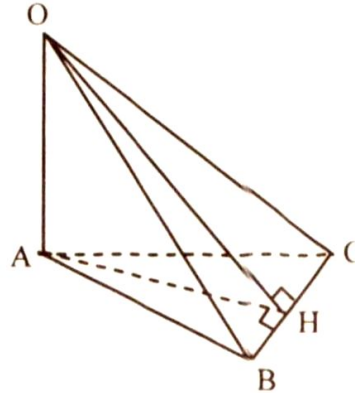
$$S = \sqrt{10.5.3.2} = 10\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{2S}{BC} = \frac{20\sqrt{3}}{5} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Vì  $AH \perp BC \Rightarrow OH \perp BC$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } OH^2 &= OA^2 + AH^2 \\ &= 16 + 48 = 64 \end{aligned}$$

Vậy:  $OH = 8 \text{ (cm)}$



**Ví dụ 2:** Tứ diện SABC có tam giác ABC vuông cân đỉnh B và  $AC = 2a$ , có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và  $SA = a$ .

a) Tính khoảng cách từ S đến đường thẳng BC.

b) Hạ  $AH \perp SB$ . Tính khoảng cách từ trung điểm O của AC đến đường thẳng CH.

**Giải**

a) Ta có  $SA \perp (ABC)$ ,  $AB \perp BC$  nên  $SB \perp BC \Rightarrow d(S; BC) = SB$ .

Tam giác ABC vuông cân tại B,

$AC = 2a$  nên  $AB = a\sqrt{2}$ .

Tam giác SAB vuông tại A.

$$SB^2 = SA^2 + AB^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{3}.$$

b) Ta có  $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$

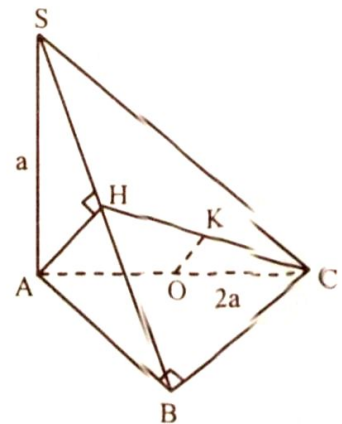
nên  $AH \perp SB$  thì  $AH \perp (SBC)$ .

Gọi K là trung điểm của HC:  $OK \parallel AH \Rightarrow OK \perp (SBC)$ .

nên  $OK \perp CH$  do đó  $d(O; CH) = OK = \frac{AH}{2}$

- Xét tam giác vuông SAB với đường cao AH ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$



**Ví dụ 3:** Hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng  $3a$ , cạnh bên bằng  $2a$ . Gọi G là trọng tâm của tam giác đáy ABC, M là trung điểm SC.

a) Tính khoảng cách từ S tới mặt phẳng đáy (ABC).

b) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAG).

**Giải**

a) SG là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC nên  $SG \perp (ABC)$ .

Tam giác SAG vuông tại G nên

$$SG^2 = SA^2 - AG^2$$



Vậy khoảng cách từ S tới mặt phẳng (ABC) là  $SG = a$ .

$$d(M; (SAG)) = \frac{1}{2} \cdot d(C; (SAG)) = \frac{1}{2} \cdot CI = \frac{3a}{4}.$$

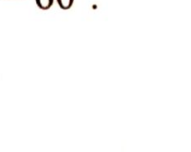
## Giải

Hạ  $SH \perp mp(ABC)$ , do  $SA = SB = SC$  nên  $HA = HB = HC$  mà  $\triangle ABC$  vuông tại C. nên H là trung điểm của cạnh huyền AB. Ta có:

**Giải:**

$$CH = AC.\sin 60^\circ = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$
$$\sin \widehat{CBH} = \frac{CH}{BC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\angle H = 60^\circ$ .



**Ví dụ 6:** Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD tâm O cạnh a, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = a. Gọi I là trung điểm của cạnh SC và M là trung điểm của đoạn AB.

- Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (ABCD).
- Tính khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng CM.

**Giải**

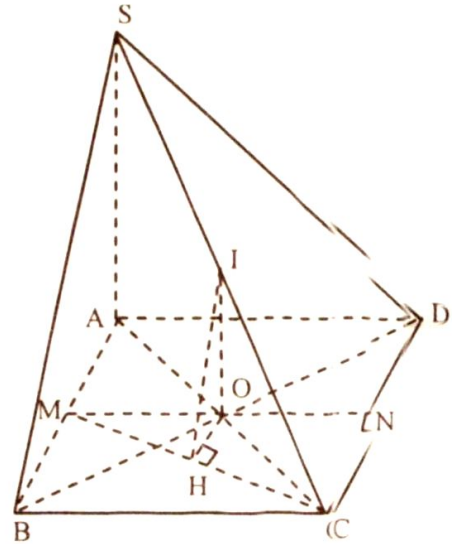
- Ta có  $SA \perp (ABCD)$  mà  $IO \parallel SA$   
do đó  $IO \perp (ABCD)$  nên

$$d(I; (ABCD)) = IO = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}.$$

- Hạ  $IH \perp CM$  thì  $OH \perp CM$   
và  $d(I; CM) = IH$   
Gọi N là trung điểm của cạnh CD.  
Hai tam giác vuông MHO và MNC đồng dạng nên  $\frac{OH}{CN} = \frac{OM}{CM}$ .

$$\text{Do đó } OH = \frac{CN \cdot OM}{MC} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{a}{2\sqrt{5}}$$

$$\text{nên } IH^2 = IO^2 + OH^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{20} = \frac{3a^2}{10} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}.$$



**Ví dụ 7:** Cho góc vuông  $\widehat{xOy}$  và một điểm M nằm ngoài mặt phẳng chứa góc vuông. Khoảng cách từ M đến đỉnh O của góc vuông bằng 2cm và khoảng cách từ M tới hai cạnh Ox và Oy đều bằng 17cm. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (xOy) chứa góc vuông.

**Giải**

Hạ  $MH \perp (Ox, Oy)$  thì  $d(M, (xOy)) = MH$

Hạ  $MA \perp Ox, MB \perp Oy$

Ta có  $HA \perp OA$  và  $HB \perp OB$

nên tứ giác OAHB là hình chữ nhật.

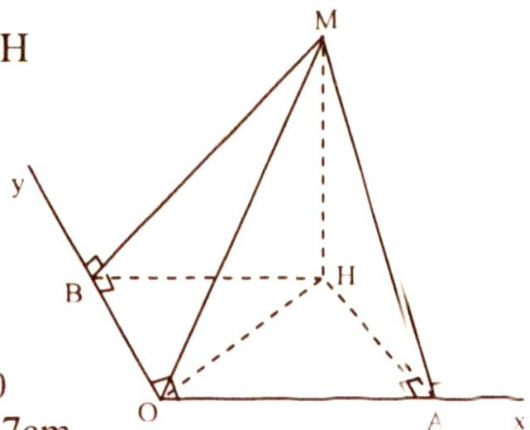
Hơn nữa vì  $MA = MB$  nên  $HA = HB$

nên OAHB là hình vuông

$$MH^2 = MO^2 - OH^2 = MA^2 - AH^2$$

$$\Rightarrow 23^2 - 2OA^2 = 17^2 - OA^2 \Rightarrow OA^2 = 240$$

$$\text{Do đó } MH^2 = 17^2 - 240 = 49 \text{ nên } MH = 7\text{cm}.$$



**Ví dụ 8:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tính:

- Khoảng cách từ A đến mp(A'BD).
- Khoảng cách từ A', B, C, D' đến đường thẳng AC'.



### Giải

Điểm A và C' cách đều ba đỉnh của tam giác đều A'BD nên AC' là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác A'BD, do đó đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng (A'BD) tại tâm I của tam giác đều A'BD.

a) Ta có  $d(A; (A'BD)) = AI$

Vì  $AO \parallel A'C'$  và  $A'C' = 2AO$  nên  $AI = \frac{1}{3}AC' = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

b) Vì  $AC' \perp mp(A'BD)$  nên  $A'I \perp AC'$ ,

do đó:  $d(A'; AC') = A'I$

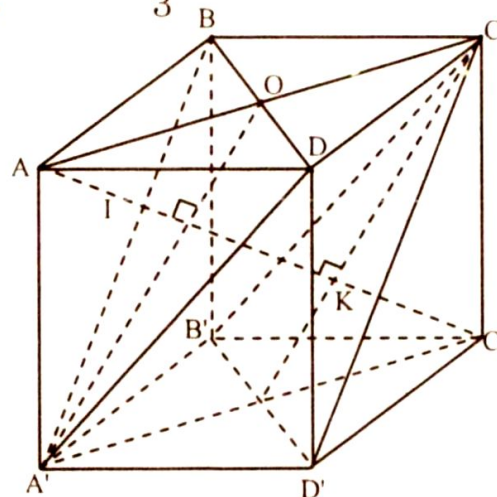
Tam giác AA'I vuông tại I

$$\text{nên } A'I^2 = AA'^2 - AI^2 = \frac{6a^2}{9}$$

$$\text{Vậy } A'I = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Do  $(A'BD) \parallel (CB'D')$  nên khoảng cách từ A', B, C, D' đến AC' đều

$$\text{bằng } \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



### DẠNG 2: KHOẢNG CÁCH GIỮA 2 ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU.

• Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là độ dài của đoạn vuông góc chung IJ, trong đó I, J là giao điểm của đường vuông góc chung của a và b với a và b.

Khoảng cách này bằng khoảng cách giữa 1 đường thẳng và mặt song song chứa đường thẳng kia, cũng bằng khoảng cách giữa 2 mặt song song chứa lần lượt 2 đường thẳng đó. Bài toán đưa về tính khoảng cách từ 1 điểm đặc biệt đến mặt phẳng.

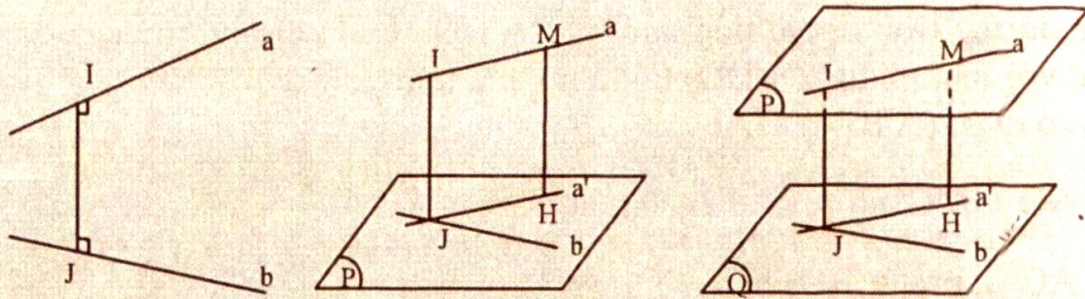
• Nếu yêu cầu tìm đoạn vuông góc chung thì phải xác định rõ 2 mút I, J, ta có thể xem xét:

- Đoạn vuông góc chung IJ có sẵn,  $IJ \perp a$ ,  $IJ \perp b$ .

- Nếu có mp(P) chứa b và song song với a thì chọn điểm thuận lợi M thuộc a, hạ  $MH \perp (P)$ . Nếu H thuộc b thì  $MH \equiv IJ$ , còn nếu H không thuộc b thì qua H vẽ đường thẳng a' song song a cắt b tại J, từ J vẽ  $JH \parallel HM$  thì IJ là đoạn vuông góc chung cần dựng,  $d(a; b) = d(a; (P)) = MH = IJ$ .

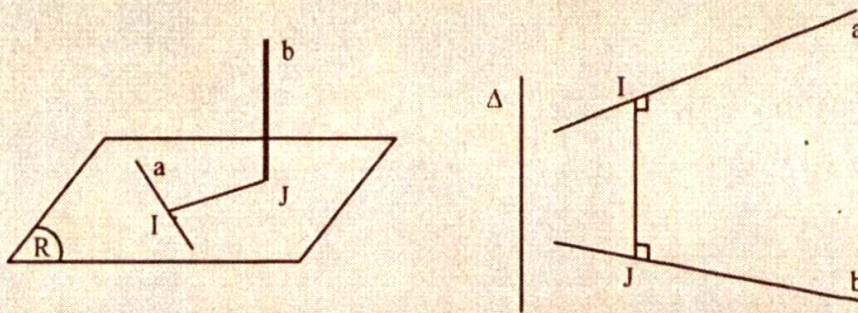


- Nếu có mp(Q) chứa b và song song (P) chứa a thì cũng chọn  $M \in a$  như trên.



- Nếu có mặt (R) chứa a và vuông góc với b thì J là giao điểm của b với (R), hạ  $JI \perp a$ .

- Nếu có đường thẳng d vuông góc chung với a và b thì JI và d đồng phẳng.



**Ví dụ 1:** Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và  $OA = OB = OC = a$ . Gọi I là trung điểm của BC. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng.

a) OA và BC

b) AI và OC.

**Giải**

a) Ta có  $OI \perp BC$ ,  $OI \perp OA$  nên OI là đoạn vuông góc chung của OA và BC.

$$\text{Ta có } OI = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

b) Gọi K trung điểm OB thì  $IK \parallel OC$  nên  $OC \parallel \text{mp}(AKI)$ .

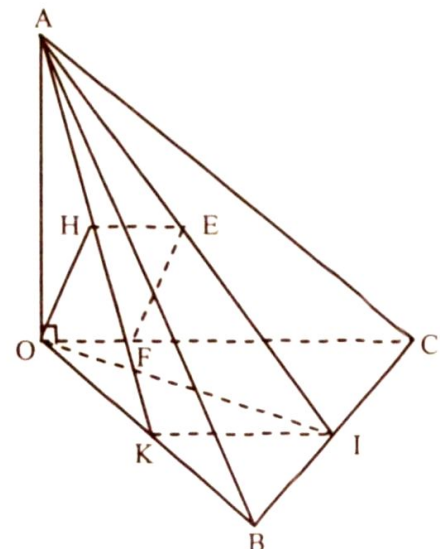
Ta có  $CO \perp (OAB)$  nên  $IK \perp (OAB)$ , do đó  $(OAB) \perp (AKI)$ .

Hạ  $OH \perp AK$  thì  $OH \perp (AKI)$ .

Vẽ  $HE \parallel OC$  với  $E \in AI$  và vẽ  $EF \parallel OH$  với  $F \in OC$  thì EF là đoạn vuông góc chung của AI và OC,  $EF = OH$ .

Trong tam giác vuông OAK:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{5}{a^2}$$





$$\text{nên } OH^2 = \frac{a^2}{5} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

**Ví dụ 2:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, có cạnh SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng đáy. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các đường thẳng.

- a) SB và CD      b) SC và BD      c) SC và AB.

**Giải**

- a) Ta có  $BC \perp SA$ ,  $AB$  nên  $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$ .

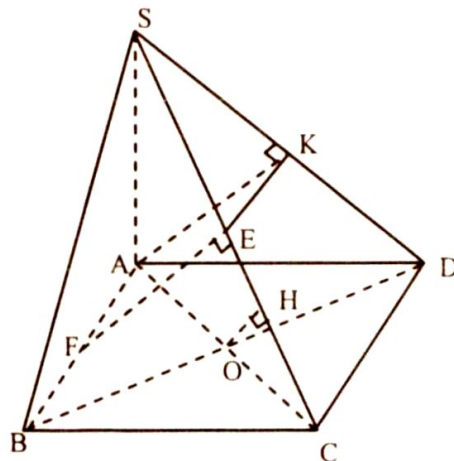
Mà có  $BC \perp CD$  nên BC là đoạn vuông góc chung của SB và CD,  $d(SB; CD) = BC = a$ .

- b) Ta có:  $BD \perp SA$ ,  $AC$

nên  $BD \perp (SAC)$  tại O. Hạ  $OH \perp SC$ . Ta có  $OH \perp SC$  và  $OH \perp BD$  nên OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

$$\text{Ta có: } \frac{OH}{OC} = \frac{SA}{SC}.$$

$$\text{nên } OH = \frac{OC \cdot SA}{SC} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + 2a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



- c) Ta có  $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$ .

$CD \perp AD$ ,  $SA$  nên  $CD \perp (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (SCD)$

Hạ  $AK \perp SD$  thì  $AK \perp (SCD)$ .

Vẽ  $KE \parallel CD$ ,  $E \in SC$ , vẽ  $EF \parallel AK$ ,  $F \in AB$  thì EF là đoạn vuông góc chung của SC và AB.

$$\text{Ta có } EF = AK = \frac{AS \cdot AD}{SD} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

**Ví dụ 3:** Cho tứ diện đều ABCD. Xác định và tính đoạn vuông góc chung giữa 2 đường thẳng AB và CD.

**Giải**

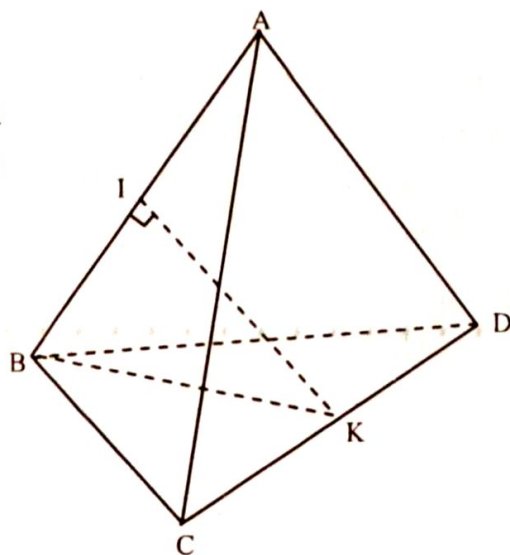
Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AB và CD thì IK là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

Tam giác BKI vuông tại I.

Ta có:  $IK^2 = BK^2 - BI^2$

$$= \left( \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Vậy } IK = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



**Ví dụ 4:** Xác định và tính đoạn vuông góc chung giữa hai cạnh AB và CD của hình tứ diện ABCD biết rằng  $AC = BC = AD = BD = a$  và  $AB = p$ ,  $CD = q$ .

**Giải**

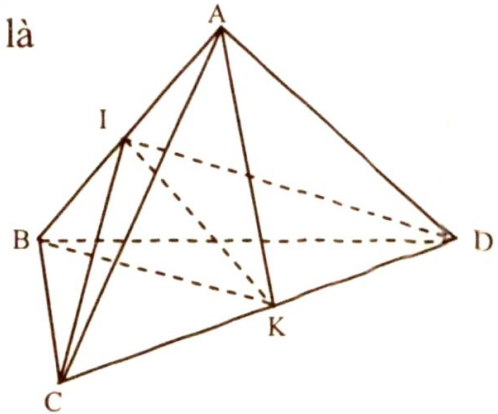
Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tam giác cân ABC, ABD nên có  $AB \perp IC$ ,  $ID \Rightarrow AB \perp (ICD)$   
 $\Rightarrow IK \perp AB$ . Tương tự  $IK \perp CD$  nên IK là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

$$\text{Ta có } IK^2 = BK^2 - BI^2 = BK^2 - \frac{p^2}{4}$$

$$\text{và } BK^2 = BC^2 - CK^2 = a^2 - \frac{q^2}{4}$$

$$\text{nên } IK^2 = a^2 - \frac{p^2 + q^2}{4}$$

$$\text{Vậy } IK = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - (p^2 + q^2)}, \text{ với điều kiện } 4a^2 - (p^2 + q^2) > 0$$



**Ví dụ 5:** Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Giả sử  $AB = CD$ ,  $AC = BD$ ,  $AD = BC$ , chứng minh IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD. Phần đảo có đúng không.

**Giải:**

Cho  $AB = CD$ ,  $AC = BD$ ,  $AD = BC$ .

Hai tam giác ABC và BAD bằng nhau (c.c.c) nên hai trung tuyến tương ứng là CI và DI bằng nhau, do đó tam giác ICD cân, nên  $IJ \perp CD$ .

Tương tự ta chứng minh được  $IJ \perp AB$ .  
 Vậy IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

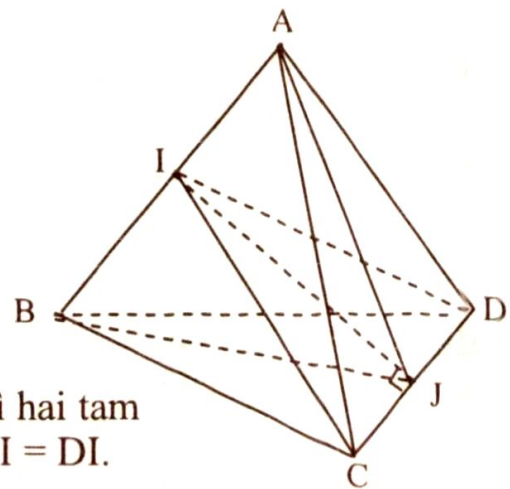
Đảo lại, nếu IJ vuông góc với AB, CD thì hai tam giác ABJ, CDI cân tại J, I nên  $AJ = BJ$ ,  $CI = DI$ .

Áp dụng định lý trung tuyến:

$$\begin{cases} AC^2 + AD^2 = BC^2 + BD^2 \\ CA^2 + CB^2 = DA^2 + DB^2 \end{cases} \Rightarrow 2AD^2 = 2BC^2 \Rightarrow AD = BC$$

Do đó:  $AC = BD$ ,  $AB = CD$

Cách khác: Chiếu lên mặt phẳng đi qua CD và song song với AB.



**Ví dụ 6:** Tứ diện OABC có  $OA = OB = OC = a$  và  $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^\circ$ ,  $\widehat{BOC} = 90^\circ$ .

a) Chứng minh ABC là tam giác vuông và  $OA \perp BC$ .

b) Tìm đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC.



c) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) vuông góc với nhau.

**Giải**

- a) Vì  $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^\circ$ ,  
 $OA = OB = OC = a$  nên  $AB = AC = a$ .

Suy ra  $\triangle ABC = \triangle OBC$ .

Vậy tam giác ABC vuông cân tại A.

Gọi J là trung điểm của BC thì

$OJ \perp BC$ ,  $AJ \perp BC$  nên  $OA \perp BC$ .

- b) Gọi I là trung điểm của OA, vì  $OJ = AJ$   
 nên  $JI \perp OA$ , do đó IJ là đoạn vuông góc  
 chung của OA và BC.

$$IJ^2 = OJ^2 - OI^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow JI = \frac{a}{2}.$$

- c) Ta có  $OJ \perp BC$ ,  $AJ \perp BC$ ,  $IJ = \frac{1}{2}OA$  nên tam giác OAJ vuông tại J. Do  
 đó góc giữa mp(OBC) và mp(ABC) là góc  $\widehat{OJA} = 90^\circ$ .

Vậy  $mp(OBC) \perp mp(ABC)$ .

**Ví dụ 7:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AA'$  và  $CB'$ ,  $AA'$  và  $DB'$ ,  $AC$  và  $B'D'$ .

**Giải**

- Ta có  $A'B' \perp AA'$ ,  $A'B' \perp B'C'$

$\Rightarrow A'B' \perp CB'$

nên  $d(AA', CB') = A'B' = a$ .

- Ta có  $AA' \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel mp(BB', DD')$

nên  $d(AA'; DB') = d(AA', (BB', DD'))$

$= d(A; (BB', DD'))$

$$= d(A; DB) = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

- Ta có  $AC$  thuộc  $mp(ABCD)$ ,  $B'D'$  thuộc  $mp(A'B'C'D')$

Vì  $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$  và có  $AA'$  vuông góc chung nên:

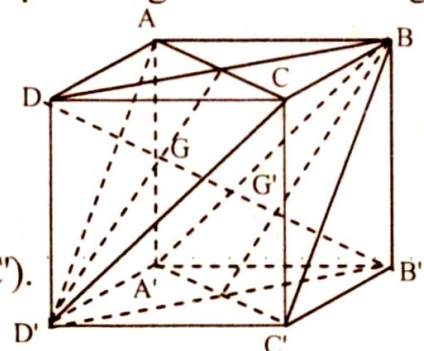
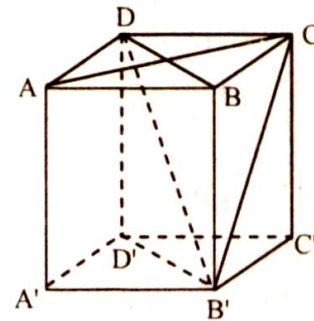
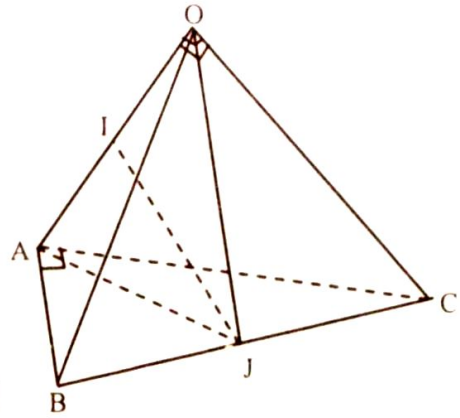
$d(AC; B'D') = d((ABCD); (A'B'C'D')) = AA' = a$ .

**Ví dụ 8:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $BC'$  và  $CD'$ .

**Giải**

Ta có  $CD'$  nằm trong  $mp(ACD')$  và  $BC'$  nằm trong  $mp(A'BC')$ . Vì D và B' cách đều các đỉnh của 2 tam giác đều  $ACD'$ ,  $A'BC'$  nên:

$DB' \perp (ACD')$ ,  $(A'BC') \perp (ACD')$  do đó  $(ACD') \parallel (A'BC')$ .



Ta có B'D cắt hai mặt phẳng (ACD') và (A'BC') lần lượt tại G, G' thì  $DG = GG' = G'B'$ .

$$\text{Vậy } d(CD'; BC') = \frac{DB'}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Chú ý: Nếu yêu cầu tìm đoạn vuông góc chung IJ của BC' và CD' thì ta tìm hình chiếu của trung điểm E của BC' lên mp(ACD') hoặc để ý DB' là đường vuông góc chung nên IJ và DB' đồng phẳng, do đó DI và B'J cắt nhau tại trung điểm của CC'.

**Ví dụ 9:** Cho hình chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có 3 kích thước  $AB = AA' = a$ ,  $AC' = 2a$ .

a) Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD').

b) Tìm đoạn vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và CD'.

### Giải

a) Xét tứ diện DACD' có DA, DC, DD' đôi một vuông góc nên khoảng cách DH từ D đến mặt phẳng (ACD') với H là trực tâm tam giác ACD, được tính bởi hệ thức:

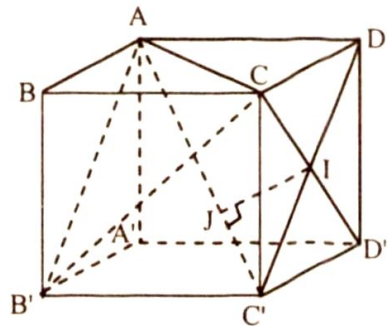
$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{DD'^2}$$

Ta có:  $DC = a$ ,  $DD' = a$ ,

$$\begin{aligned} AC'^2 &= AC^2 + CC'^2 \\ &= DA^2 + DC^2 + CC'^2 \end{aligned}$$

$$\text{nên } 4a^2 = DA^2 + a^2 + a^2 \Rightarrow DA^2 = 2a^2.$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{DH^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow DH = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$



b) Vì  $CD = DD' = a$  nên  $CD' \perp C'D$ .

Mặt khác  $AD \perp (CDD'C')$  nên  $CD' \perp AD$  và  $CD' \perp mp(AC'D)$ .

Gọi giao điểm của CD' với mp(AC'D) là I. Hạ  $IJ \perp AC'$  thì IJ là đoạn vuông góc chung của AC' và CD'.

$$\text{Ta có } \frac{IJ}{AD} = \frac{IC'}{AC'} \Rightarrow IJ = AD \cdot \frac{C'D}{2AC'} = a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2 \cdot 2a} = \frac{a}{2}.$$



**Ví dụ 10:** Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD tâm O có cạnh  $AB = a$ . Đường cao SO là hình chóp vuông góc với mặt đáy (ABCD) và có  $SO = a$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) AC và SD

b) SC và AB.

### Giải

a) Ta có  $AC \perp BD$ ,  $AC \perp SO \Rightarrow AC \perp (SOD)$ .

Hạ  $OE \perp SD$  thì  $d(AC; SD) = OE$

Tam giác SOD vuông tại O

$$\frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow OE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



- b Vì  $AB \parallel CD$  nên  $AB \parallel (SCD)$ .  
Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB, CD thì ta có O là trung điểm của IK. Do đó:

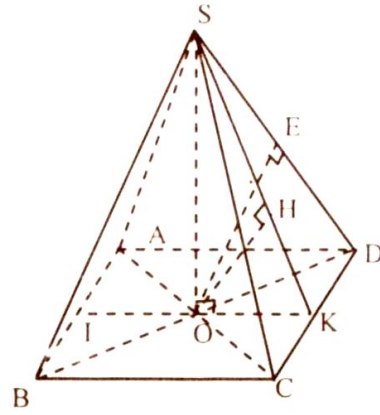
$$\begin{aligned} d(SC, AB) &= d(AB, (SCD)) \\ &= d(I, (SCD)) \\ &= 2d(O, (SCD)) \end{aligned}$$

Ta có  $CD \perp SO, OK$  nên  $CD \perp (SOK)$   
 $\Rightarrow (SCD) \perp (SOK)$

Hạ  $OH \perp SK$  thì  $OH \perp (SCD)$  nên  $d(O, (SCD)) = OH$

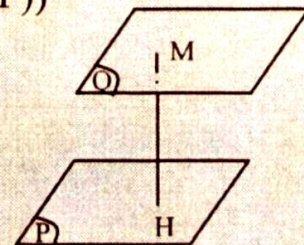
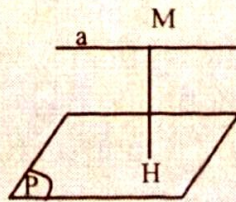
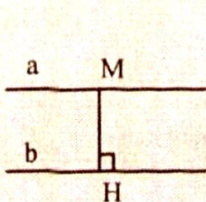
$$\text{Ta có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Vậy } d(SC; AB) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$



### DẠNG 3: TỔNG HỢP KHOẢNG CÁCH

- Khoảng cách giữa 2 yếu tố song song
  - $a \parallel b, M \in a$  thì  $d(a; b) = d(M; b)$
  - $a \parallel (P), M \in a$  thì  $d(a; (P)) = d(M; (P))$
  - $(Q) \parallel (P), M \in (Q)$  thì  $d((Q); (P)) = d(M; (P))$



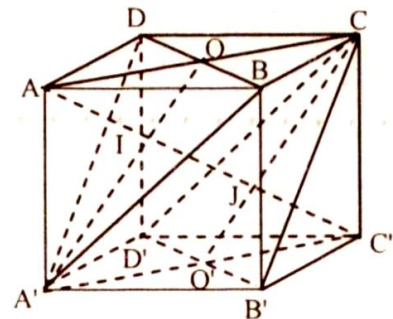
• Nói chung khoảng cách giữa điểm, đường thẳng, mặt phẳng đều đưa về khoảng cách giữa 2 điểm. Thông thường trước khi tính toán, ta phải xác định vị trí các yếu tố cần tìm và tính khoảng cách.

**Ví dụ 1:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh a. Tính khoảng cách giữa

- $AA'$  và mặt phẳng song song  $(BB', DD')$
- 2 mặt phẳng song song  $(A'BD)$  và  $(CB'D')$ .

**Giải**

- a Ta có  $AA' \parallel (BB'; DD')$  nên  
 $d(AA'; (BB', DD')) = d(A; (BB', DD'))$   
 $= d(A; BD) = AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$



ABC

- b) Ta có hình chiếu của  $AC'$  lên  $(ABCD)$  là  $AC \perp BD$  nên  $AC' \perp BD$ . hình chiếu của  $AC'$  lên  $(AA', BB')$  là  $AB' \perp BA'$  nên  $AC' \perp BA'$ .  
Do đó  $AC' \perp (A'BD)$ , tương tự  $AC' \perp (CB'D')$  nên  $(A'BD) \parallel (CB'D')$ , hơn nữa  $O$  và  $O'$  là tâm của 2 đáy nên  $AC'$  cắt mặt phẳng  $(A'BD)$ ,  $(CB'D')$  tại  $I, J$  và  $AI = IJ = JC'$ .

$$\text{Vậy } d((ABD), (CB'D')) = IJ = \frac{AC'}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

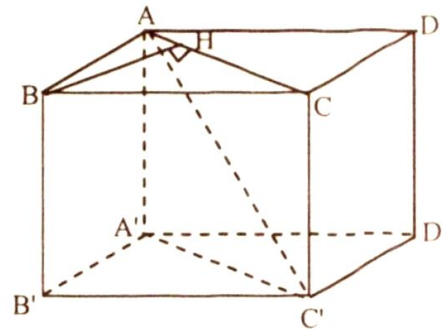
**Ví dụ 2:** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = a$ ,  $AD = b$ ,  $AA' = c$ .

- a) Tính khoảng cách từ điểm  $B$  đến mặt phẳng  $(ACC'A')$ .  
b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $BB'$  và  $AC'$ .

**Giải**

- a) Hạ  $BH \perp AC$ , vì  $BH \perp AA'$  nên  $BH \perp (ACC'A')$   
Vậy  $d(B; (ACC'A')) = BH$ .  
Ta có:  $BH.AC = BA.BC$

$$\text{hay } BH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



- b)  $BB'$  và  $AC'$  chéo nhau mà  $BB' \parallel (ACC'A')$  nên:

$$d(BB'; AC') = d(BB'; (ACC'A')) = d(B; (ACC'A')) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**Ví dụ 3:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng  $30^\circ$ . Hình chiếu  $H$  của điểm  $A$  trên mặt phẳng  $(A'B'C')$  thuộc đường thẳng  $B'C'$ .

- a) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.  
b) Chứng minh rằng hai đường thẳng  $AA'$  và  $B'C'$  vuông góc, tính khoảng cách giữa chúng.

**Giải**

Do  $AH \perp (A'B'C')$  nên  $\widehat{AA'H}$  là góc giữa  $AA'$  và  $mp(A'B'C')$ .

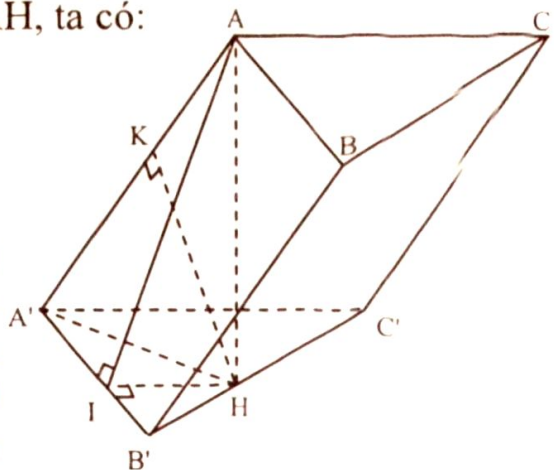
Theo giả thiết thì  $\widehat{AA'H} = 30^\circ$ .

- a) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy là  $AH$ , ta có:

$$AH = AA' \sin 30^\circ = \frac{a}{2}.$$

- b)  $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Vì  $A'B'C'$  là tam giác đều cạnh  $a$ ,  $H$  thuộc đường thẳng  $B'C'$  nên  $A'H \perp B'C'$  và  $H$  là trung điểm của  $B'C'$ . Mặt khác  $AH \perp B'C'$  nên  $AA' \perp B'C'$ . Hạ  $HK \perp AA'$  thì  $HK$  chính là khoảng cách giữa  $AA'$  và  $B'C'$ .



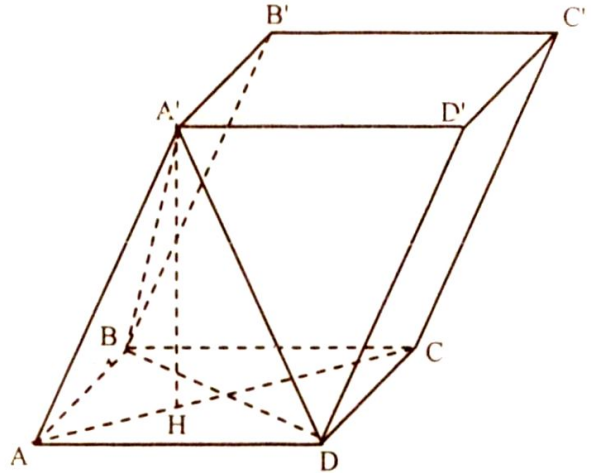


$$\text{Do } AA'.HK = AH.A'H \text{ nên: } HK = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

**Ví dụ 4:** Cho hình hộp thoi  $ABCD.A'B'C'D'$  có các cạnh đều bằng  $a$  và  $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$ . Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy  $(ABCD)$  và  $(A'B'C'D')$ .

**Giải**

Từ giả thiết suy ra các tam giác  $A'AD$ ,  $BAD$ ,  $A'AB$  là các tam giác cân cùng có góc ở đỉnh bằng  $60^\circ$  nên chúng là các tam giác đều. Do đó tứ diện  $A'ABD$  là tứ diện đều cạnh  $a$ , hình chiếu của  $A'$  trên  $mp(ABCD)$  chính là tâm  $H$  của tam giác đều  $ABD$ . Khoảng cách giữa hai đáy là  $A'H$ . Ta có:



$$A'H^2 = AA'^2 - AH^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$$

$$\text{Vậy } A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

**Ví dụ 5:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình chữ nhật và  $AB = 2a$ ,  $BC = a$ . Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng  $a\sqrt{2}$ .

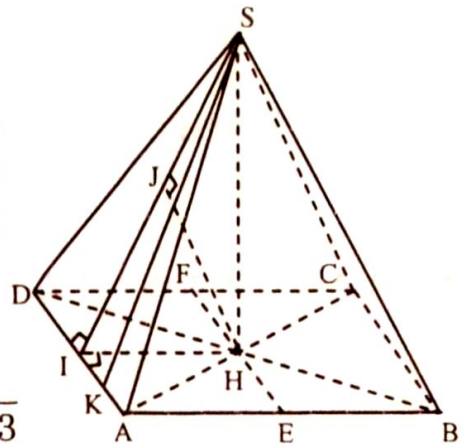
- Tính khoảng cách từ  $S$  đến mặt phẳng đáy  $(ABCD)$ .
- Gọi  $E$  và  $F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB$  và  $CD$ ;  $K$  là điểm bất kì thuộc đường thẳng  $AD$ . Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng  $EF$  và  $SK$  không phụ thuộc vào  $K$ , hãy tính khoảng cách đó theo  $a$ .

**Giải**

a) Hạ  $SH \perp (ABCD)$

Vì  $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$  nên  $HA = HB = HC = HD$ . Do  $ABCD$  là hình chữ nhật nên  $H$  chính là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Khoảng cách từ  $S$  đến  $mp(ABCD)$  bằng  $SH$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } SH^2 &= SA^2 - \frac{AC^2}{4} = 2a^2 - \frac{AB^2 + BC^2}{4} \\ &= 2a^2 - \frac{4a^2 + a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



- Vì  $EF \parallel AD$  nên  $EF \parallel mp(SAD)$ , mặt khác  $SK$  nằm trong  $mp(SAD)$  nên khoảng cách giữa  $EF$  và  $SK$  chính là khoảng cách giữa  $EF$  và  $mp(SAD)$ .

Vậy khoảng cách giữa EF và SK không phụ thuộc vào vị trí của điểm K trên đường thẳng AD.

Ta có  $d(EF; SK) = d(EF; (SAD)) = d(H; (SAD))$

Gọi I là trung điểm của AD, hạ  $HJ \perp SI$  thì  $HJ \perp mp(SAD)$ , do đó  $d(H; (SAD)) = HJ$ . Ta có:

$$HJ.SI = SH.HI \text{ và } SI^2 = SA^2 - AI^2 = 2a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{4}$$

$$\text{Vậy: } HJ = \frac{SH.HI}{SI} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

**Ví dụ 6:** Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a và có mặt bên SAD là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I, M, F lần lượt là trung điểm của AD, AB, SB và gọi K là giao điểm của BI và CM.

- Chứng minh rằng mặt phẳng (CMF) vuông góc với mặt phẳng (SIB).
- Tính BK và KF và suy ra tam giác BKF cân tại đỉnh K.
- Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SD.
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CM.

**Giải**

- $\triangle IAB = \triangle MBC$  (c.g.c) nên góc  $\widehat{ABI} = \widehat{BCM}$  mà  $AB \perp BC$ , nên  $CM \perp BI$  và có  $CM \perp SI$ , do đó  $CM \perp (SIB)$ .

Vậy  $(CMF) \perp (SIB)$

- Xét tam giác vuông BCM có

$$CM = \frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ và } BK.CM = BM.BC$$

$$\Rightarrow BK = \frac{BM.BC}{CM} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

Xét 2 tam giác vuông SIB, BKF:

$$SB^2 = SI^2 + IB^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} = 2a^2.$$

$$\text{nên } FK^2 = BF^2 + BK^2 - 2BF.BK.\cos B = \frac{a^2}{5}$$

$$\text{Do đó } FK = \frac{a\sqrt{5}}{5} = BK \text{ (đpcm).}$$

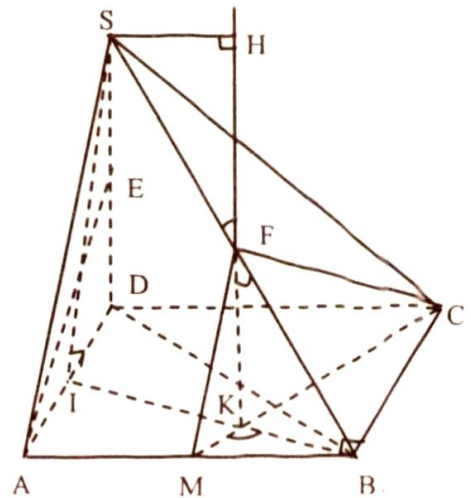
- Vì  $CD \perp (SAD)$  nên  $(SCD) \perp (SDA)$

Hạ  $AE \perp SD$  thì E là trung điểm SD, đoạn vuông góc chung của SD và

$$AB \text{ là } AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

- Vì  $SA \parallel (CMF)$  nên  $d(SA; CM) = d(SA; (CMF))$

Hạ  $SH \perp FK$  thì  $SH \perp (CMF)$ . Do đó  $(SA, CM) = SH$ , ta có:





$$SH = SF \cdot \sin \widehat{SFH} = SF \cdot \sin \widehat{KFB} = SF \cdot \sin \widehat{SBI} = SF \cdot \frac{SI}{SB} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

**Ví dụ 7:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là nửa lục giác đều ABCD nội tiếp trong đường tròn đường kính AD = 2a và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy, SA =  $a\sqrt{6}$ .

- a) Tính các khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD).  
b) Tính khoảng cách giữa đường thẳng AD và mặt phẳng song song (SBC).

**Giải**

- a) Vì ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính

AD = 2a nên ta có:

AD // BC và AB = BC = CD = a, đồng thời

AC ⊥ CD, AB ⊥ BD, AC = BD =  $a\sqrt{3}$ .

Do đó CD ⊥ (SAC)

Hạ AH ⊥ SC mà AH ⊥ CD nên AH ⊥ (SCD)

⇒ d(A, (SCD)) = AH

Tam giác SAC vuông tại A:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{(a\sqrt{6})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2a^2}$$

$$\Rightarrow AH^2 = 2a^2 \Rightarrow AH = a\sqrt{2}.$$

Gọi I là trung điểm của AD ta có BI // CD nên BI song song với mặt phẳng (SCD).

Từ đó suy ra d(B, (SCD)) = d(I, (SCD))

$$= \frac{1}{2} d(A, (SCD)) = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

- b) Ta có AD // BC nên AD // (SBC).

Hạ AE ⊥ BC ⇒ SE ⊥ BC ⇒ BC ⊥ (SAE) ⇒ (SAE) ⊥ (SBC).

Hạ AF ⊥ SE thì AF ⊥ (SBC). Ta có:

$$d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)) = d(A, SE) = AF.$$

Xét tam giác vuông AEB, SAE: AE =  $a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

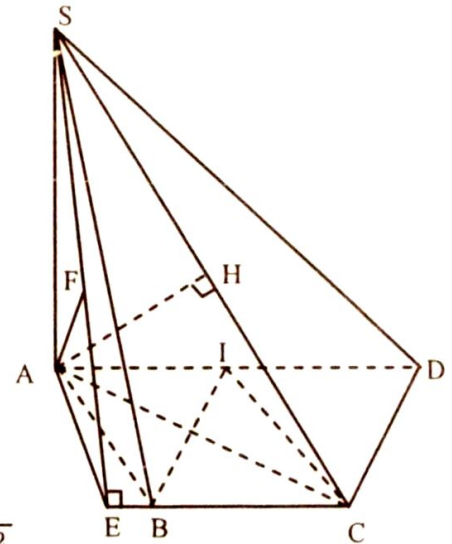
$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{9}{6a^2} \Rightarrow AF = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

**Ví dụ 8:** Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, các cạnh bên đều bằng  $a\sqrt{3}$ .

- a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABCD).

- b) Xác định và tính thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) qua A, vuông góc với SC.

- c) Gọi φ là góc giữa AB và (P). Tính sin φ.



### Giải

- a) Gọi O là tâm của hình vuông ABCD thì SO là khoảng cách từ S đến (ABCD)

$$\text{Ta có: } SO^2 = SC^2 - OC^2 = 3a^2 - \frac{2a^2}{4} = \frac{10a^2}{4}$$

$$\text{Vậy } SO = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

- b) Vì  $BD \perp (SAC)$  nên  $BD \perp SC$ .

Hạ  $AC' \perp SC$ ,  $AC'$  cắt  $SO$  tại H và cắt  $SC$  tại C'. Trùng (SBD), đường thẳng qua H và song song với BD cắt SB và SD lần lượt tại B' và D'.

Ta có:  $B'D' \perp SC$  nên  $SC \perp mp(AB'C'D')$  và thiết diện cần tìm là tứ giác  $AB'C'D'$ .

$$BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AC' \Rightarrow B'D' \perp AC' \text{ nên } S = \frac{1}{2} AC' \cdot B'D'.$$

$$\text{Ta có: } AC' = \frac{SO \cdot AC}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{10}}{2} \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{15}}{3}$$

$$SC'^2 = SA^2 - AC'^2 = 3a^2 - \frac{5a^2}{3} = \frac{4a^2}{3}$$

$$SH = \frac{SC' \cdot SC}{SO} = \frac{4a}{\sqrt{10}}. \text{ Vì } B'D' \parallel BD \text{ nên:}$$

$$\frac{B'D'}{BD} = \frac{SH}{SO} = \frac{4a}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2}{a\sqrt{10}} = \frac{4}{5} \Rightarrow B'D' = \frac{4}{5} a\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{5} a\sqrt{2} = \frac{2a^2 \cdot \sqrt{30}}{15}.$$

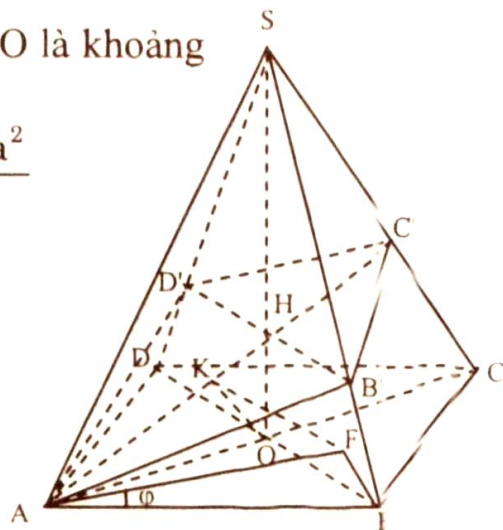
- c) Hạ  $OK \perp (P)$  thì K thuộc  $AC'$

$$\text{Hạ } BF \perp (P) \text{ thì } BF = OK = \frac{CC'}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Ta có } \sin \varphi = \sin \widehat{BAF} = \frac{BF}{BA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

**Ví dụ 9:** Cho hai tia Ax và By vuông góc với nhau và nhận AB làm đoạn vuông góc chung. Gọi M và N là hai điểm di động lần lượt trên Ax và By sao cho  $AM + BN = MN$ . Đặt  $AB = 2a$ , gọi O là trung điểm của AE, H là hình chiếu của O trên MN.

- a) Chứng minh rằng  $OH = a$ ,  $HM = AM$ ,  $HN = BN$ .





b) Gọi  $B'x$  là tia song song và cùng chiều với  $Ax$  và  $K$  là hình chiếu của  $H$  trên  $(B'x, By)$ . Chứng minh  $BK$  là phân giác của góc  $x'By$  và  $H$  ở trên một đường tròn cố định.

**Giải:**

- a Kéo dài  $MA$  đoạn  $AP = BN$   
ta có  $MP = MN$  và  $OP = ON$ .  
Do đó:  $\triangle OMP = \triangle OMN$  (c.c.c)  
 $\Rightarrow OA = OH \Rightarrow OH = a$   
 $\Rightarrow HM = AM, HN = BN$

- b Gọi  $M'$  là hình chiếu của  $M$  trên  $(Bx', By)$  thì  $HK \parallel MM'$ .

Xét tam giác  $BNM$ :

$$\frac{KM'}{KN} = \frac{HM}{HN} = \frac{BM'}{BN} \text{ nên } BK \text{ là phân giác của góc } \widehat{x'By}.$$

Gọi  $\beta$  là mặt phẳng  $(AB, Bt)$

Vì  $HK \parallel AB$  nên  $HK$  nằm trong  $\beta$  và do đó  $H$  thuộc  $\beta$

Trong  $\beta$ , ta có  $OH = a$ . Vậy  $H$  ở trên đường tròn cố định đường kính  $AB$  và nằm trong mặt phẳng  $(AB, Bt)$  cố định.

**V dụ 10:**  $ABC.A_1B_1C_1$  là một hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh dài bằng  $a$ . Xét các đoạn thẳng có hai đầu lần lượt nằm trên hai đường chéo  $BC_1$  và  $CA_1$  của hai mặt bên lăng trụ và song song với mặt phẳng  $(ABB_1A_1)$ . Tính chiều dài của đoạn thẳng ngắn nhất trong các đoạn thẳng như thế.

**Giải**

Chọn hệ cơ sở:  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$

Gọi  $N$  thuộc đoạn  $BC_1$

Và  $M$  thuộc đoạn  $CA_1$

Ta có  $\overrightarrow{MA_1} = \alpha \overrightarrow{CA_1} = \alpha(\vec{c} - \vec{b})$

với  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

$$\overrightarrow{C_1N} = \beta \overrightarrow{C_1B} = \beta(-\vec{b} - \vec{c} + \vec{a})$$

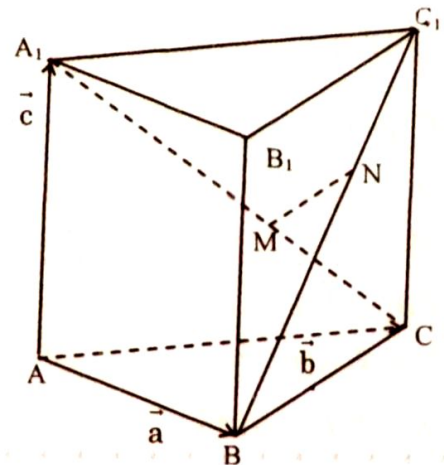
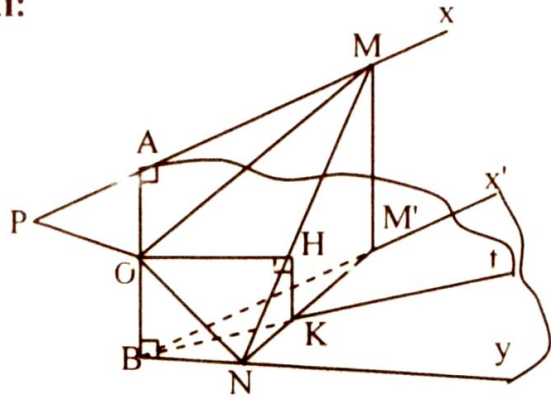
với  $0 \leq \beta \leq 1$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{C_1N} \\ &= \alpha(\vec{c} - \vec{b}) + \vec{b} + \beta(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) \\ &= \beta\vec{a} + (1 - \alpha - \beta)\vec{b} + (\alpha - \beta)\vec{c} \end{aligned}$$

Vì  $MN \parallel mp(ABB_1A_1)$  và  $CC_1 \parallel mp(ABB_1A_1)$  nên ba vector  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CC_1}$  là đồng phẳng. Do đó có cặp số  $(p, q)$  sao cho:

$$\overrightarrow{MN} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{CC_1} = p\vec{a} + q\vec{c}$$

$$\text{Do đó } \beta\vec{a} + (1 - \alpha - \beta)\vec{b} + (\alpha - \beta)\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{c}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = p \\ 1 - \alpha - \beta = 0 \\ \alpha - \beta = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \beta \\ \alpha = 1 - \beta \\ q = 1 - 2\beta \end{cases}$$

Do đó  $\overrightarrow{MN} = \beta \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + (1 - 2\beta) \vec{c}$  nên:

$$\begin{aligned} MN^2 &= \beta^2 \vec{a}^2 + (1 - 2\beta)^2 \vec{c}^2 + 2\beta(1 - 2\beta) \vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= \beta^2 a^2 + (1 - 2\beta)^2 a^2 + 0 \\ &= (5\beta^2 - 4\beta + 1)a^2 = 5\left(\beta - \frac{2}{5}\right)^2 a^2 + \frac{1}{5} a^2 \geq \frac{1}{5} a^2 \end{aligned}$$

$MN$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow MN^2$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow \beta = \frac{2}{5}$ .

Vậy  $MN = \frac{a\sqrt{5}}{5}$  là giá trị nhỏ nhất của các đoạn  $MN$ .

### C. BÀI LUYỆN TẬP

1. Cho mặt phẳng  $\alpha$ . Một đường thẳng  $AB$  cắt  $\alpha$  tại điểm  $O$  sao cho  $O$  là trung điểm của đoạn  $AB$ . Chứng minh  $A$  và  $B$  cách đều  $\alpha$ .
2. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ .
  - a) Tính khoảng cách từ  $A$  đến  $mp(A'B'C'D')$ .
  - b) Tính khoảng cách từ  $B$  đến đường thẳng  $A'C'$ .

**ĐS:** a)  $AA' = a$     b)  $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

3. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng  $AB'$  và  $BC'$ .

**HD:** đường chéo  $A'C$  vuông góc chung với  $AB'$  và  $BC'$ .

4. Hình chóp  $S.ABCD$  có  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$  và  $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$ . Gọi  $I, J$  là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ .
  - a) Chứng minh  $mp(SIJ)$  vuông góc với  $mp(SBC)$
  - b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AD$  và  $SB$ .
5. Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có tất cả các cạnh bằng  $a$ , góc tạo bởi cạnh bên và đáy  $60^\circ$ , hình chiếu của  $A$  lên  $(A'B'C')$  là trung điểm của  $B'C'$ .
  - a) Tính khoảng cách 2 đáy
  - b) Chứng minh  $AA' \perp B'C'$ .
  - c) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng  $AA'$  và  $B'C'$ .



**HD:** vẽ ngược hình, từ trung điểm H của  $B'C'$  dựng đường thẳng vuông góc với đáy, lấy điểm A.

6. Chứng minh với tứ diện gần đều thì 4 đường cao bằng nhau.
7. Cho tam giác ABC với  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$ . Trên đường thẳng vuông góc với mp(ABC) tại A, lấy điểm O sao cho  $AO = d$ . Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng BC.

**HD:** dùng công thức Hêrông để tính đường cao AH của tam giác ABC

7. Tứ diện ABCD có hai mặt (ABC) và (ADC) nằm trong hai mặt phẳng vuông góc nhau, tam giác ABC vuông tại A,  $AB = a$  và  $AC = b$ , tam giác ADC vuông tại D,  $CD = a$ .

a) Chứng minh các tam giác BAD và BDC đều vuông

b) Chứng minh đoạn nối trung điểm là đoạn vuông góc chung của AD, BC.

8. Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có ABC là tam giác đều cạnh a,  $AA'$  vuông góc với mp(ABC) và  $AA' = a\sqrt{2}/2$ . Gọi O và O' lần lượt là trung điểm của AB và A'B'.

a) Chứng minh AB vuông góc (COO')

b) Tính khoảng cách giữa AB và CB'; giữa A'B và B'C.

9. Cho mặt phẳng  $\alpha$  và một điểm O ngoài  $\alpha$ . A là một điểm cố định thuộc  $\alpha$  sao cho OA không vuông góc với  $\alpha$ , d là một đường thẳng lưu động trong  $\alpha$  nhưng luôn luôn qua A. Gọi M là hình chiếu của O trên d.

a) Tìm tập hợp các điểm M thỏa các tính chất trên

b) Tìm vị trí của d để độ dài OM là lớn nhất

10. Cho tam giác đều ABC cạnh a và một điểm S ngoài mặt phẳng (ABC) sao cho  $SA = SB = SC = b$

a) Tính khoảng cách từ S đến (ABC)

b) Tính cosin của góc hợp bởi đường thẳng SA và mp(ABC).

**HD:** hình chiếu của S lên đáy là tâm của tam giác ABC

11. Cho 3 tia không đồng phẳng Ox, Oy, Oz mà góc  $\widehat{xOy} = 90^\circ$ ,

góc  $\widehat{yOz} = \widehat{zOx} = 60^\circ$ . Tính góc giữa 2 mặt phẳng (xOz) và (yOz).

**HD:** lấy A, B, C trên 3 tia Ox, Oy, Oz mà  $OA = OB = OC = 1$

ABC

12. Tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với (ABC),  $AC = 3\text{cm}$ ,  $BC = 5\text{cm}$ ,  $AB = AD = 4\text{cm}$ .

- a) Tính khoảng cách từ A đến mp(BCD).
- b) Tính góc giữa AB và mặt phẳng (BCD).
- c) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (ABC) và (BCD).

13. Cho tứ diện OABC có  $OA = 5$ ,  $OB = 6$ ,  $OC = 7$  đôi một vuông góc. Hạ OH vuông góc (ABC).

- a) Tính OH
- b) Tính cosin của góc giữa (OBC) và (ABC)

**HD:** H là trực tâm của tam giác ABC

14. Cho hình chóp S.ABCD có  $SA = x$  và các cạnh còn lại bằng a.

- a) Chứng minh tam giác SAC là tam giác vuông
- b) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SAC) và (BCD).
- c) Tính khoảng cách từ S đến đáy.

**HD:** a) tam giác có trung tuyến bằng nửa cạnh tương ứng

15. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a, hạ AH vuông góc (BCD). Gọi I trung điểm AH.

- a) Chứng minh tứ diện IBCD có 3 cạnh IB, IC, ID đôi một vuông góc.
- b) Tính góc hợp bởi IB và mp(BCD).
- c) Tính khoảng cách giữa BC và IA

16. Cắt hình lập phương cạnh a bởi mặt phẳng qua 1 đường chéo. Tìm diện tích thiết diện bé nhất

**HD:** nửa thiết diện là tam giác, chọn đường chéo đó làm cạnh đáy có độ dài không đổi.

\*\*\*\*\*



# MỤC LỤC

<b>Chương I: Phép dời hình và phép đồng dạng trong mặt phẳng</b> .....	5
§1. Phép biến hình.....	5
§2. Phép dời hình.....	5
Dạng 1: Các phép dời hình.....	6
Dạng 2: Phép tịnh tiến .....	15
Dạng 3: Phép đối xứng trục .....	23
Dạng 4: Phép đối xứng tâm .....	30
Dạng 5: Phép quay .....	37
Dạng 6: Hình bằng nhau .....	43
§3. Phép đồng dạng .....	51
Dạng 1: Phép vị tự.....	51
Dạng 2: Phép đồng dạng .....	61
<b>Chương II: Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian. Quan hệ song song</b> .....	69
§1. Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng.....	69
Dạng 1: Hình biểu diễn và vị trí tương đối .....	71
Dạng 2: Giao điểm, giao tuyến, thiết diện .....	75
Dạng 3: Đồng quy, thẳng hàng .....	83
Dạng 4: Toán tổng hợp .....	87
§2. Đường thẳng và mặt phẳng song song.....	98
Dạng 1: Vị trí tương đối.....	100
Dạng 2: Chứng minh song song.....	105
Dạng 3: Giao tuyến và thiết diện song song.....	109
Dạng 4: Toán tổng hợp .....	115
§3. Hai mặt phẳng song song .....	125
Dạng 1: Chứng minh song song.....	127
Dạng 2: Lăng trụ và hình hộp.....	132
Dạng 3: Yếu tố cố định - tập hợp điểm .....	140
Dạng 4: Tổng hợp song song .....	144
§4. Phép chiếu song song .....	155

<b>Chương III: Vectơ trong không gian. Quan hệ vuông góc.....</b>	<b>161</b>
§1. Vectơ trong không gian. Sự đồng phẳng của vectơ.....	161
Dạng 1: Toán chứng minh.....	162
Dạng 2: Tính toán và biểu diễn .....	169
Dạng 3: Quan hệ đồng phẳng.....	173
Dạng 4: Song song, thẳng hàng .....	182
§2. Hai đường thẳng vuông góc.....	196
Dạng 1: Chứng minh vuông góc .....	196
Dạng 2: Tính góc giữa 2 đường thẳng.....	201
Dạng 3: Toán tổng hợp .....	206
§3. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.....	216
Dạng 1: Chứng minh vuông góc .....	217
Dạng 2: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.....	224
Dạng 3: Thiết diện vuông góc.....	227
Dạng 4: Toán tổng hợp .....	236
§4. Hai mặt phẳng vuông góc .....	250
Dạng 1: Chứng minh vuông góc .....	251
Dạng 2: Góc giữa 2 mặt phẳng .....	255
Dạng 3: Lăng trụ - hình chóp.....	263
Dạng 4: Tổng hợp vuông góc .....	268
§5. Khoảng cách.....	278
Dạng 1: Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng, mặt phẳng.....	279
Dạng 2: Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau .....	283
Dạng 3: Tổng hợp khoảng cách.....	289